Colle du 22/01 - Sujet 1
Analyse asymptotique et continuité

Question de cours. Démonstration du théorème d'encadrement dans le cas où la variable tend vers $-\infty$.

Exercice 1. Soient $a < b$ et $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction continue.

1. Démontrer que f admet un point fixe i.e. qu'il existe $\omega \in [a;b]$ tel que $f(\omega) = \omega$.
2. Montrer que ce point fixe est unique si f est décroissante sur $[a;b]$.

Exercice 2. La fonction suivante f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui donner localement la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$f : x \mapsto \left(x^2 - 1\right) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Colle du 22/01 - Sujet 2
Analyse asymptotique et continuité

Question de cours. Comparer asymptotiquement $(n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Le démontrer.

Exercice 1. Soient $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) > 0$. Démontrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant C$.

Exercice 2. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{x\pi}{4}\right)}.$$

Colle du 22/01 - Sujet 3
Analyse asymptotique et continuité

Question de cours. Démonstration à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exercice 1. La fonction suivante f admet-elle une tangente en 0 ? Si oui donner localement la position de la courbe par rapport à sa tangente.

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\sin(x)} - 1}{x}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.