Colle du 05/02 - Sujet 1
Dérivabilité et suites numériques

Question de cours. Démontrer l'identité des accroissements finis

Exercice 1. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $\forall x \in [0;1]$, $f''(x) \leqslant 0$. Montrer que f est positive.

Exercice 2. Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in]0;1]$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels dans $]0;1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que $\mathrm{e}^n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Colle du 05/02 - Sujet 2
Dérivabilité et suites numériques

Question de cours. Démontrer le théorème de Rolle.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $l < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $l > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Que dire lorsque $l = 1$?

Exercice 2. Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(0) = a = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Montrer qu'il existe $c \in]0;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Colle du 05/02 - Sujet 3
Dérivabilité et suites numériques

Question de cours. Démontrer qu'une suite réelle convergente est bornée.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $l > 0$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^{2^n-1}}$ et donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

Colle du 05/02 - Sujet 4
Dérivabilité et suites numériques

Question de cours. Démontrer que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Exercice 1. Soit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\ln(n!)}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \geqslant \frac{\ln(n)}{2}$.
2. Montrer que $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. En déduire que $\frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \lfloor \ln(k) \rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.