Colle du 12/02 - Sujet 1
Dérivabilité et suites numériques

Question de cours. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie si $u_0 \in U$ et si U une partie stable de f.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}$. Déterminer si f est prolongeable par continuité puis si le prolongement est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Monter que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n$ est minorée par le terme général d'une suite divergente.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$ et $w_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$
4. En déduire que ces deux suites sont adjacentes.
5. Déterminer un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Colle du 12/02 - Sujet 2
Dérivabilité et suites numériques

Question de cours. Démontrer que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Exercice 1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad \forall x > 1, \quad f(x) = ax^2 + bx + 1.$$
Déterminer a et b pour que f soit dérivable en sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in [0;2]$ et par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

1. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[0;2]$.
2. Déterminer l'unique valeur possible de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque celle-ci converge.
3. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $d_n = |u_n - 1|$. Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note l sa limite.
4. Déterminer l et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Colle du 12/02 - Sujet 3
Dérivabilité et suites numériques

Question de cours. Démontrer qu'une suite réelle convergente est bornée.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Déterminer si f est prolongeable par continuité et si le prolongement est dérivable.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.

1. Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n dans $[1/2, 1]$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$