Devoir Maison 10

A faire pour le jeudi 04/04

On souhaite démontrer dans ce problème que si E est un espace vectoriel de dimension infinie et si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f^k\right) = E$.

Partie A : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On pose dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et on définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{pmatrix} \end{array}.$$

A.1 Démontrer que f est linéaire.

A.2 (a) Déterminer l'image de f. On en déterminera une base et on spécifiera sa dimension.
- (b) Vérifier que $(-1, 1, 1) \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
- (c) Déterminer le noyau de f. On en déterminera une base et on spécifiera sa dimension.
- (d) Les espaces $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

A.3 (a) Calculer f^2 (on explicitera pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son image par f^2).
- (b) Déterminer l'image de f^2, en donner une base et sa dimension.
- (c) Déterminer le noyau de f^2, en donner une base et sa dimension.
- (d) Les espaces $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Partie B : Généralités en dimension quelconque

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de f.

B.1 Si $f \in GL(E)$ montrer alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f^k\right) = E$.

Dans la suite f est un endomorphisme quelconque (non nécessairement bijectif).

B.2 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subseteq \mathrm{Im}\left(f^k\right)$.

B.3 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)$.

B.4 Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathrm{Ker}\,(f^p) = \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right)$.
- (a) Soit $x \in E$ tel que $f(x) \in \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right)$. Montrer que $x \in \mathrm{Ker}\,(f^p)$.
- (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f^{p+2}\right) = \mathrm{Ker}\,(f^p)$.
- (c) En déduire que pour tout $k \geqslant p$, $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) = \mathrm{Ker}\,(f^p)$.

Partie C : Résolution en dimension finie

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel de dimension finie et on note $n = \dim(E)$ sa dimension. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \mathrm{rg}\left(f^k\right).$$

C.1 (a) Justifier que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée.
- (b) Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne à partir d'un certain rang.

On pose p le premier indice à partir duquel $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne. On appelle alors p **l'indice** de f.

C.2 Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f^p)$ et $\mathrm{Im}\,(f^p)$ sont en somme directe.

C.3 En déduire par un argument de dimension que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \oplus \mathrm{Im}\,(f^p) = E$.

C.4 (a) Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f^p)$. A l'aide de la question précédente, montrer que $y \in \mathrm{Im}\left(f^{2p}\right)$.
- (b) En déduire que $\mathrm{Im}\,(f^p) = \mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right)$.

Partie D : Un exemple sur les polynômes

On suppose dans cette partie que $n \in \mathbb{N}^*$ et que $E = \mathbb{K}_n[X]$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On définit alors

$$\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & \Delta(P) = P(X+1) - P(X). \end{array}$$

D.1 Vérifier que Δ est linéaire.

D.2 Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$, $d \in \mathbb{N}^*$.

(a) On pose $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $P(X+1) = \sum_{j=0}^{d} b_j X^j$. Montrer que pour tout $j \in [\![1; d]\!]$,

$$b_j = \sum_{i=j}^{d} \binom{i}{j} a_i.$$

(b) En déduire que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

D.3 Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta)$.

D.4 Déterminer Δ^{n+1} et $\operatorname{Ker}\left(\Delta^{n+1}\right)$.

D.5 Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg\left(\Delta^k(X^n)\right)$.

D.6 En déduire que pour tout $k \leqslant n$, $\operatorname{Ker}\left(\Delta^k\right) \neq \operatorname{Ker}\left(\Delta^{n+1}\right)$.

D.7 Conclure sur l'indice de Δ (cf la partie précédente pour la définition de l'indice).

On pose

$$\mathscr{B}_1 = \left(X^n, \Delta(X^n), \Delta^2(X^n), \ldots, \Delta^n(X^n)\right) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_2 = \left(X^n, (X+1)^n, \ldots, (X+2)^n, \ldots, (X+n)^n\right)$$

On pose également $\Delta_1 \in \mathscr{L}(E)$ définie pour tout $P \in E$ par $\Delta_1(P) = P(X+1)$.

D.8 (a) Justifier que $\mathscr{B}_1$ est une base de E.

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,

$$\Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \Delta_1^j.$$

(c) En déduire que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\Delta^k(X^n) \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_2)$.

(d) Conclure que $\mathscr{B}_2$ est une base de E.

Partie E : Un contre-exemple (Facultatif)

On suppose ici que $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère la dérivation $D \in \mathscr{L}(E)$ définie pour tout $P \in E$, par $D(P) = P'$.

E.1 Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, $\operatorname{Ker}\left(D^k\right)$ et $\operatorname{Im}\left(D^k\right)$ ne sont pas supplémentaires.