Devoir Maison 11

A faire pour le jeudi 18/04

Exercice I (Combinatoire)

Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient p boules blanches distinctes, numérotées de 1 à p et q boules noires distinctes numérotées de 1 à q. Soit $r \in [\![0; p+q]\!]$.

I.1 On tire de façon simultanée r boules dans l'urne.

(a) Combien de tirages différents sont possibles ?

(b) Soit $i \in [\![0; r]\!]$. Combien parmi les tirages précédents présentent exactement i boules blanches ?

(c) En déduire que

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.$$

(d) En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

I.2 On suppose que maintenant que les r tirages sont successifs et sans remise.

(a) Combien y a t-il de tirages possibles ?

(b) Combien y a-t-il de tirages possibles contenant au moins une boule blanche ?

Exercice II (Combinatoire)

Le perroquet du capitaine Haddock ne possédant que 9 mots dans son vocabulaire.
Des mots de la vie courante

« dring » « allô » « caramba »

mais aussi et surtout issus des expressions du capitaine :

« mille-sabords » « tonnerre » « boit-sans-soif »
« ectoplasme » « moule-à-gauffre » « bachi-bouzouk »

On suppose que chaque phrase du perroquet contient six mots (éventuellement plusieurs fois le même).

II.1 Combien des phrases peut prononcer le perroquet ?

II.2 (a) Combien de phrases ont exactement six mots différents ?

(b) Combien de phrases ont exactement cinq mots différents ?

(c) En déduire le nombre de phrases contenant au moins cinq mots différents.

II.3 On suppose dans cette question que le perroquet n'utilise qu'une seule expression du capitaine, « mille-sabords » et que toutes les autres expressions proviennent de la vie courante.

(a) Soit $p \in [\![0; 6]\!]$. Quel est le nombre de phrases que peut prononcer le perroquet dans cette situation plaçant dans la phrase p fois exactement le mot « mille-sabords » ?

(b) Justifier par un calcul direct puis par une approche combinatoire que

$$4^6 = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} 3^{6-p}.$$

Exercice III (Séries)

Rappel des épisodes précédents : nous nous étions arrêtés en plein suspens dans l'épisode précédent (DM6), nous avions étudié la série harmonique et montré que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1),$$

où γ *est un réel fixé entre* $[0;1]$*. Oui mais que se cache derrière la constante ? Quel est le terme suivant du développement limité de la série harmonique ? Ce problème propose d'établir à nouveau le résultat ci-dessus (par une autre méthode naturellement) et d'aller chercher le terme suivant.*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \gamma_n = H_n - \ln(n).$$

III.1 (a) Déterminer un équivalent simple de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$.

(c) En déduire que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera γ sa limite.

(d) Montrer alors que

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right).$$

III.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = H_n - \ln(n+1)$.

III.3 En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} u_k$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \gamma.$$

III.4 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on précisera les limites aux bornes).

III.5 Soit $(a,b) \in]0;+\infty[^2$. Calculer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

III.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $N \geqslant n$,

$$(N+2)\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) - (n+2)\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant (N+1)\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) - (n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_k$.

III.7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+2)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1 \leqslant R_n \leqslant (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.$$

III.8 En déduire proprement que

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

III.9 Conclure à l'aide des questions précédentes que

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$