Devoir Maison 12

A faire pour le jeudi 09/05

Exercice I (Intégration)

L'objectif du problème est de déterminer un équivalent de $n!$. La première partie établie un équivalent à une constante près sans déterminer la constante. La seconde partie consiste à calculer explicitement cette constante.

Partie A : un équivalent

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n}n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

IA.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$v_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

IA.2 En déduire un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

IA.3 Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$. On note S sa somme totale.

IA.4 En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera C sa limite. Exprimer C en fonction de S.

IA.5 En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\sqrt{n}n^n\,\mathrm{e}^{-n}.$$

Partie B : calcul de α

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

IB.1 Calculer I_0 et I_1.

IB.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

IB.3 Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

IB.4 Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

IB.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} \leqslant I_n.$$

IB.6 En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera ℓ sa limite.

IB.7 Soit $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\frac{\pi}{2}.$$

(c) En déduire que

$$0 \leqslant \ell \leqslant \varepsilon.$$

(d) Conclure sur la valeur de ℓ.

IB.8 A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

IB.9 En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.$$

IB.10 (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p \left(p!\right)^2} \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{4^p \left(p!\right)^2}{(2p+1)!}.$$

(b) A l'aide de la question IA.5, déterminer un équivalent simple en fonction de α de I_{2p} puis de I_{2p+1} quand p tend vers $+\infty$.

(c) En déduire la limite de $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ en fonction de α.

IB.11 Conclure sur la valeur de α.

Exercice II (Probabilités et algèbre)

Dans une mare du château de Moulinsart, vivent des grenouilles. Le Professeur Tournesol souhaite étudier la population de ces grenouilles. Leur présence dans cette mare est fortement conditionnée à la météo. Pour son modèle, le Professeur Tournesol suppose qu'il y a trois météo distinctes : il fait beau, il pleut, il neige. Il constate également que chaque jour, la météo change (on interdit d'avoir deux jours consécutifs avec la même météo) et la météo du lendemain est prise de façon équiprobable parmi les deux autres météo possibles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{array}{ll} A_n & : \text{« il pleut le jour } n \text{ »} \\ B_n & : \text{« il fait beau le jour } n \text{ »} \\ C_n & : \text{« il neige le jour } n \text{ »} \end{array}$$

On pose enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \mathbb{P}\left(A_n\right), \qquad q_n = \mathbb{P}\left(B_n\right), \qquad r_n = \mathbb{P}\left(C_n\right).$$

Partie A : mise en place de la chaîne de Markov.

IIA.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\mathbb{P}\left(A_{n+1} \mid A_n\right)$, $\mathbb{P}\left(A_{n+1} \mid B_n\right)$ et $\mathbb{P}\left(A_{n+1} \mid C_n\right)$?

IIA.2 On suppose dans cette question uniquement que $p_0 = 1/5$, $q_0 = 1/5$.

(a) Que vaut r_0 ?

(b) Calculer p_1.

(c) Les évènements A_0 et B_0 sont-ils indépendants ?

(d) Les évènements A_1 et B_0 sont-ils indépendants ?

(e) Calculer la probabilité qu'au jour 0 il ait fait beau sachant qu'au jour 1, il a neigé.

On suppose maintenant et pour le reste du problème qu'au jour 0, il pleut.

IIA.3 (a) Calculer p_1, q_1 et r_1.

(b) En déduire p_2, q_2 et r_2.

IIA.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.

Partie B : comportement asymptotique par diagonalisation.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

IIB.1 (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

(b) En déduire une formule de X_n en fonction des puissances de A et de X_0.

On identifie $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^3$ et on pose $E = \mathbb{R}^3$ et considère alors l'application suivante

$$\varphi \quad : \quad \begin{cases} E & \to E \\ X & \mapsto AX \end{cases}.$$

IIB.2 (a) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

(b) Calculer le noyau de φ.

(c) Justifier que φ est un automorphisme.

Définition II.1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit λ est une valeur propre de φ si et seulement si

$$\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}.$$

IIB.3 Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ deux valeurs propres de φ. On suppose que $\lambda \neq \mu$. Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(\varphi - \mu \operatorname{Id}_E)$ sont en somme directe.

IIB.4 Montrer que 1 et $\frac{-1}{2}$ sont des valeurs propres de φ et déterminer une base $\operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}\left(\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{Id}_E\right)$.

On pose $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

IIB.5 Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

IIB.6 Calculer $D = P^{-1}AP$. Quelle valeur retrouve-t-on sur la diagonale ?

IIB.7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_n en fonction de P, P^{-1}, D et X_0. En déduire X_n.

IIB.8 En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

Partie C : détermination de la probabilité par une suite arithmético-géométrique

On se propose dans cette partie de déterminer directement une formule de p_n en fonction de n. Les résultats de la partie précédente ne pourront pas être exploités.

IIC.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer r_n en fonction de p_n et q_n.

IIC.2 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{1 - p_n}{2}$.

IIC.3 En déduire une formule explicite de p_n en fonction de n.

Partie D : et les grenouilles alors ? (facultatif)

On note S_n le nombre de grenouilles à la fin du jour n. On pose $S_0 = 2$. Le Professeur Tournesol remarque le comportement suivant, si la journée n a été pluvieuse alors la population augmente d'un individu, $S_n = S_{n-1} + 1$ (jour pluvieux, jour heureux dit la grenouille). S'il a fait beau temps, la population diminue d'un individu $S_n = S_{n-1} - 1$ et s'il neige la population diminue de trois individus $S_n = S_{n-1} - 3$. On considère toujours que le jour 0 fut un jour pluvieux. On note enfin T_n l'évènement : « la population de grenouille est toujours restée strictement positive pendant les n premiers jours ».

IID.1 Calculer $\mathbb{P}(T_1)$. Que vaut alors S_1 sachant T_1 ?

IID.2 Justifier que $T_2 = B_1 \cap A_2$, en déduire $\mathbb{P}(T_2)$. Que vaut alors S_2 dans ce cas ?

IID.3 Conjecturer une écriture de T_n en fonction de A_i et B_i pour $i \in [\![1; n]\!]$ et donc une formule $\mathbb{P}(T_n)$ en fonction de n. La mare a-t-elle une chance de rester éternellement peuplée ?