Correction du Devoir Maison 13

Solution de l'exercice I

On pose $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et on considère l'application par

$$\varphi : \begin{array}{l} E \to E \\ f \mapsto \varphi(f), \end{array}$$

où $\varphi(f)$ est une fonction de E définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\varphi(f) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Partie A : Intégration, fonction réelle

IA.1 Pour montrer que φ est bien définie, il faut montrer que pour tout $f \in E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} (i)\ \varphi(f) \text{ existe} \\ (ii)\ \varphi(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $f \in E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x; x+1]$. Donc $\varphi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(f)$ est bien défini sur $\mathbb{R}$.

(ii) Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'analyse assure que F existe, est même $\mathscr{C}^1$ et une primitive de f. Donc $\varphi(f) : x \mapsto F(x+1) - F(x)$ existe sur $\mathbb{R}$ (déjà vu ci-dessus) et est même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notamment φ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\varphi(f) \in E$.

Donc pour tout $f \in E$, $\varphi(f)$ existe et $\varphi(f) \in E$. Conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } E \text{ et à valeurs dans } E.}$

IA.2 Soit $f \in E$. On a déjà vu dans la question précédente, grâce au théorème fondamental de l'analyse et à travers l'écriture $\varphi(f) : x \mapsto F(x+1) - F(x)$, où $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ que $\boxed{\varphi(f) \text{ est une fonction } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$ De plus, F étant une primitive de f,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)'(x) = F'(x+1) - F'(x) = f(x+1) - f(x).}$$

IA.3 Soit $f \in E$. Supposons f bornée sur $\mathbb{R}$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| \leqslant M.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $x + 1 > x$, par l'inégalité triangulaire,

$$|\varphi(f)(x)| = \left| \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^{x+1} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Or par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leqslant M$. Donc notamment, $\forall t \in [x; x+1]$, $|f(t)| \leqslant M$. Donc par croissance de l'intégrale

$$|\varphi(f)(x)| \leqslant M \int_x^{x+1} 1\,\mathrm{d}t = M.$$

Or M ne dépend pas de x. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(f)(x)| \leqslant M$. Conclusion, $\boxed{\varphi(f) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$.

IA.4 On suppose dans cette question que $f(x)$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$ fixé quand $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon\,.$$

Soit $x \geqslant x_0$. Alors pour tout $t \in [x; x+1]$, $t \geqslant x \geqslant x_0$. Donc $\ell - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant \ell + \varepsilon$. Par croissance de l'intégrale (car $x+1 \geqslant x$)

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+1} (\ell - \varepsilon)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} (\ell + \varepsilon)\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & \ell - \varepsilon \leqslant \varphi(f)(x) \leqslant \ell + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant x_0, \qquad \ell - \varepsilon \leqslant \varphi(f)(x) \leqslant \ell + \varepsilon\,.}$$

(b) Par définition même de la limite, le point précédent implique que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \varphi(f)(x) = \ell = \lim_{x \to +\infty} f(x).}$$

IA.5 On procède de même. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant A$. Soit $x \geqslant x_0$. Alors pour tout $t \in [x; x+1]$, $t \geqslant x \geqslant x_0$ donc $f(t) \geqslant A$. Ainsi, par croissance de l'intégrale ($x \leqslant x+1$ ✓)

$$\varphi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{x+1} A\,\mathrm{d}t = A.$$

Donc pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $\varphi(f)(x) \geqslant A$. Conclusion,

$$\boxed{\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} \varphi(f)(x) = +\infty\right).}$$

Partie B : Algèbre linéaire, intégration

IB.1 On a déjà démontré dans la partie précédente que φ est une application de E dans E. De plus E est bien un espace vectoriel. Démontrons donc que φ est linéaire. Soient $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour démontrer que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$, il faut démontrer que ces deux fonctions coïncident sur $\mathbb{R}$ tout entier i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x)$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \varphi(h)(x) = \int_x^{x+1} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \lambda f + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

par linéarité de l'intégrale. Par conséquent,

$$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x).$$

L'égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$. Donc φ est bien linéaire.

$\boxed{\text{Conclusion, } \varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

IB.2 D'après la question IA.2, toute image par φ est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$. Soit g la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$. On sait que g est continue, $g \in E$ mais aussi que g n'est pas dérivable en 0 (deux demi-tangentes). Donc $g \notin \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Donc $g \notin \mathrm{Im}(\varphi)$. On a montré l'existence d'une fonction de E qui n'appartient pas à $\mathrm{Im}(\varphi)$. Donc $\mathrm{Im}(f) \neq E$. Conclusion, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective et la fonction } x \mapsto |x| \text{ n'appartient pas à } \mathrm{Im}(\varphi)}$.

On considère

$$F = \{f \in E \mid f \text{ est 1-périodique.}\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

IB.3 (i) Par définition, $F \subseteq E$.

(ii) Soit f_0 l'application nulle sur $\mathbb{R}$ i.e. $f_0 = 0_E$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 0_{\mathbb{R}}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x+1) = 0 = f_0(x)$. Donc f_0 est 1-périodique et donc $0_E = f_0 \in F$.

(iii) Soient $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x+1) = \lambda f(x+1) + \mu g(x+1).$$

Par hypothèse $f \in F$ et $g \in F$ donc f et g sont 1-périodiques. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x+1) = \lambda f(x) + \mu g(x) = h(x).$$

Donc la fonction h est 1-périodique et appartient donc à F. D'où $h = \lambda f + \mu g \in F$.

$\boxed{\text{Conclusion, } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

On admet que G est aussi un sous-espace vectoriel de E (trop facile).

IB.4 (a) Soit $f \in F \cap G$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le changement de variable $s = t - 1$, on a

$$\int_1^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(s+1)\,\mathrm{d}s.$$

Or par hypothèse, $f \in F$, est périodique de période 1, donc pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f(s+1) = f(s)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_1^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la relation de Chasles,

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente,

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or par hypothèse $f \in G$ i.e. $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

(c) On a montré dans les questions précédentes que si $f \in F \cap G$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc $\varphi(f) = 0_E$ et $f \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Conclusion, $\boxed{F \cap G \subseteq \mathrm{Ker}\,(\varphi)}$.

IB.5 Soit $f \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)(x) = 0$. Donc en dérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)'(x) = 0$. Or d'après la question IA.2, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)'(x) = f(x+1) - f(x)$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x+1) = f(x)$. Donc f est 1-périodique, $f \in F$. De plus, on a également

$$0 = \varphi(f)(0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc $f \in G$. Conclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\varphi) \subseteq F \cap G}$ et d'après la question précédente, $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = F \cap G$.

Partie C : Représentation matricielle

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$e_k \quad : \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k. \end{array}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $E_n = \mathrm{Vect}\,(e_0, e_1, \ldots, e_n)$. On note φ_1 la restriction de φ à E_n. On admet que φ_1 est linéaire (en tant que restriction d'une application linéaire sur un sous-espace vectoriel).

IC.1 (a) Les e_k sont les fonctions polynomiales associées aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourrait alors démontrer que $\boxed{E_n \text{ isomorphe à } \mathbb{R}_n[X]}$.

(b) Deux espaces isomorphes ont même dimension. Donc par la question précédente,

$$\boxed{\dim(E_n) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1.}$$

(c) On pose $\mathscr{B}_1 = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$. Par hypothèse, $E_n = \text{Vect}(\mathscr{B}_1)$. Donc $\mathscr{B}_1$ est une famille génératrice de E_n (i). De plus par la question précédente,

$$\text{Card}(\mathscr{B}_1) = n+1 = \dim(E_n) \qquad (ii).$$

Donc par (i) et (ii), on conclut que $\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } E_n}$.

IC.2 Soit $j \in [\![0;n]\!]$.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_1(e_j)(x) = \int_x^{x+1} e_j(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} t^j\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{j+1}}{j+1}\right]_{t=x}^{t=x+1} = \frac{(x+1)^{j+1} - x^{j+1}}{j+1}.$$

Cette dernière expression montre bien que $\boxed{\varphi_1(e_j) \text{ est une fonction polynomiale.}}$
On note P_j le polynôme associé.

(b) D'après la question précédente,

$$P_j = \frac{(X+1)^{j+1} - X^{j+1}}{j+1}.$$

Donc par la formule du binôme de Newton,

$$P_j = \frac{1}{j+1}\left(\sum_{i=0}^{j+1}\binom{j+1}{i}X^i - X^{j+1}\right) = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j+1}\binom{j+1}{i}X^i.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_j = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j}\binom{j+1}{i}X^i.}$$

(c) Puisque P_j est le polynôme associé à $\varphi_1(e_j)$ et que pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, X^i est le polynôme associé à e_i, on a

$$\boxed{\varphi(e_j) = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j}\binom{j+1}{i}e_i.}$$

Autrement dit,

$$\text{mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi_1(e_j)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{j+1} \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{\binom{j+1}{i}}{j+1} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}.$$

IC.3 Pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, on a $\varphi_1(e_j) \in \text{Vect}(e_0, \ldots, e_j) \subseteq E_n$. Or E_n est un espace vectoriel donc

$$\text{Vect}(\varphi_1(e_0), \ldots, \varphi_1(e_n)) \subseteq E_n.$$

Donc par linéarité de φ_1, on a $\varphi_1(E_n) = \varphi_1(\text{Vect}(e_0, \ldots, e_n)) = \text{Vect}(\varphi_1(e_0), \ldots, \varphi_1(e_n)) \subseteq E_n$. On a donc bien $\varphi_1 : E_n \to E_n$. De plus φ_1 est linéaire. Conclusion, $\boxed{\varphi_1 \text{ est un endomorphisme de } E_n.}$

IC.4 Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi_1)$. Soit $(i,j)\in [\![1;n+1]\!]$ est la coordonnée de $\varphi_1(e_{j-1})$ selon le vecteur e_{i-1}. Donc par la question IC.2.(c)

$$\boxed{\forall (i,j)\in [\![1;n+1]\!]^2,\qquad a_{i,j}=\begin{cases}\frac{\binom{j}{i-1}}{j} & \text{si}\quad i\leqslant j\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}}$$

Attention, le fait que $\mathscr{B}_1$ est numérotée à partir de 0 décale tous les indices...

IC.5 (a) D'après la question précédente, pour tout $(i,j)\in [\![1;n+1]\!]^2$, $i>j$, on a $a_{i,j}=0$. Donc la matrice A est triangulaire supérieure. De plus les éléments diagonaux sont donnés pour tout $i\in[\![1;n+1]\!]$, par $a_{i,i}=\frac{\binom{i}{i-1}}{i}=\frac{i}{i}=1$. Conclusion, $\boxed{A \text{ est triangulaire supérieure et pour tout } i\in[\![1;n+1]\!],\ a_{i,i}=1}$.

(b) D'après la question précédente A est triangulaire et a des coefficients diagonaux tous non nuls. A est donc une matrice échelonnée avec un pivot $a_{i,i}$ à chaque ligne. Donc directement

$$\boxed{\mathrm{rg}(A)=n+1.}$$

(c) D'après la question précédente et le cours, on sait que $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi_1)$ est inversible i.e. φ_1 est bijective. Or φ_1 est un endomorphisme (question IC.3). Conclusion, $\boxed{\varphi_1 \text{ est un automorphisme.}}$

IC.6 On suppose dans cette question que $n=2$.

(a) Par la question IC.4, on a

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

(b) Inversons la matrice A :

$$A\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad L_2\leftarrow L_2-L_3\qquad I_3\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad L_1\leftarrow L_1-\frac12 L_2-\frac13 L_3\qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-\frac12&\frac16\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi_1^{-1}\right)=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac12&\frac16\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Donc pour tout $f=a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2\in E_2$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi_1^{-1}(f)\right)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi_1^{-1}\right)\times\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(f)=\begin{pmatrix}1&-\frac12&\frac16\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}\\a_1-a_2\\a_2\end{bmatrix}$$

ou encore

$$\varphi_1^{-1}(f)=\left(a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}\right)e_0+(a_1-a_2)e_1+a_2e_2$$

ce qui peut aussi s'écrire, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi_1^{-1}(f)(x)=\left(a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}\right)e_0(x)+(a_1-a_2)e_1(x)+a_2e_2(x)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+(a_1-a_2)x+a_2x^2.$$

Conclusion, pour tout $f:x\mapsto a_0+a_1x+a_2x^2$, on a

$$\boxed{\varphi_1^{-1}(f)\ :x\mapsto a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+(a_1-a_2)x+a_2x^2.}$$

Partie D : Représentation matricielle

On définit $\mathscr{B}_2 = (u_1, u_2, u_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_1(x) = \mathrm{e}^x, \qquad u_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad u_3(x) = \sin(2\pi x).$$

On pose φ_2 la restriction de φ sur $H = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_2)$. On admet que φ_2 est linéaire (en tant que restriction d'une application linéaire sur un sous-espace vectoriel).

ID.1 Par définition, $\mathscr{B}_2$ est une famille génératrice de H (i). Montrons que $\mathscr{B}_2$ est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \lambda_3\, u_3 = 0_E.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1\, u_1(x) + \lambda_2\, u_2(x) + \lambda_3\, u_3(x) = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1\, \mathrm{e}^x + \lambda_2\, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_3 \sin(2\pi x) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Or $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$, $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ et $\sin(2\pi x) \underset{x\to 0}{=} 2\pi x - 8\pi^3 \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
0 &\underset{x\to+\infty}{=} \lambda_1 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \lambda_2 \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \lambda_3 \left(2\pi x - 8\pi^3 \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\pi\, \lambda_3)\, x + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{x^2}{2} + \left(\lambda_1 - \lambda_2 - 8\pi^2\, \lambda_3\right) \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\pi\, \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 8\pi^2\, \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 2\,\lambda_1 + 2\pi\, \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2\,\lambda_1 - 8\pi^2\, \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc $\mathscr{B}_2$ est une famille libre (ii). Par (i) et (ii) on conclut que $\boxed{\mathscr{B}_2 \text{ est une base de } H}$, et notamment $\dim(H) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_2) = 3$.

ID.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_2(u_1)(x) &= \int_x^{x+1} u_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x \\
\varphi_2(u_2)(x) &= \int_x^{x+1} u_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=x}^{t=x+1} = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x-1} \\
\varphi_2(u_3)(x) &= \int_x^{x+1} u_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_{t=x}^{t=x+1} = \frac{\cos(2\pi x) - \cos(2\pi x + 2\pi)}{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

par 2π périodicité du cosinus sur $\mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_2(u_1)(x) = \mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x, \qquad \varphi_2(u_3)(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x-1}, \qquad \varphi_2(u_2)(x) = 0.}$$

ID.3 De la question précédente, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_2(u_1)(x) = (\mathrm{e} - 1)\,\mathrm{e}^x$. Donc

$$\varphi_2(u_1) = (\mathrm{e} - 1)\, u_1.$$

De même, $\varphi_2(u_2) = \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) u_2$ et bien sûr $\varphi_2(u_3) = 0_E$. Donc pour tout $i \in [\![1; 3]\!]$, $\varphi(u_i) \in H$. Donc par linéarité de φ_2,

$$\varphi_2(H) = \varphi_2(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)) \underset{\text{linéarité}}{=} \mathrm{Vect}(\underbrace{\varphi_2(u_1)}_{\in H}, \underbrace{\varphi_2(u_2)}_{\in H}, \underbrace{\varphi_2(u_3)}_{\in H}) \underset{H \text{ espace vectoriel}}{\subseteq} H.$$

Donc on a bien $\varphi_2 : H \to H$. Or φ_2 est linéaire (admis par l'énoncé) donc $\boxed{\varphi_2 \text{ est un endomorphisme de } H}$.

ID.4 On a vu que $\varphi_2(u_1) = (\mathrm{e}-1)\,u_1$, $\varphi_2(u_2) = \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)u_2$ et $\varphi_2(u_3) = 0_E$. D'où,

$$B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit $\mathscr{B}_3 = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad v_1(x) = \mathrm{ch}(x), \qquad v_2(x) = \mathrm{sh}(x), \qquad v_3(x) = u_3\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

ID.5 Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}u_1(x) + \frac{1}{2}u_2(x) \\ v_2(x) &= \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}u_1(x) - \frac{1}{2}u_2(x) \\ v_3(x) &= u_3\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sin\left(2\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) = \sin(2\pi x + \pi) = -\sin(2\pi x) = -u_3(x). \end{aligned}$$

Donc $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \in H$, $v_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 \in H$ et $v_3 = -u_3 \in H$. Donc $\boxed{\mathscr{B}_3 \text{ est une famille de } H}$. De plus de ces égalités, on en déduit que

$$\boxed{P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

ID.6 On pouvait naturellement classiquement inverser P par des opérations élémentaires. Remarquons ici directement que $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 - v_2$ et $u_3 = -v_3$. Le système associé à $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ étant inversible, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et de plus,

$$\boxed{P^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

On vérifie facilement que la matrice trouvée fonctionne bien.

ID.7 Puisque P est inversible, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_3)$ est une matrice de changement de bases et donc

$\boxed{\mathscr{B}_3 \text{ est bien une base de } H}$.

ID.8 Par la formule de changement de bases... mais c'est la question d'après. Appliquons directement φ_2 aux vecteurs v_1, v_2, v_3 oui oui je vous entends déjà râler que ce n'est pas plus rapide. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par les belles formules sur les fonctions hyperboliques,

$$\begin{aligned} \varphi_2(v_1)(x) &= \int_x^{x+1} \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}(x+1) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(1) + \mathrm{ch}(1)\,\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(x) \\ &= \mathrm{sh}(1)v_1(x) + (\mathrm{ch}(1)-1)\,v_2(x) \\ \varphi_2(v_2)(x) &= \int_x^{x+1} \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(x+1) - \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(1) + \mathrm{sh}(1)\,\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) \\ &= (\mathrm{ch}(1)-1)\,v_1(x) + \mathrm{sh}(1)v_2(x) \\ \varphi_2(v_3)(x) &= \varphi_2(-u_3)(x) \underset{\text{linéarité}}{=} -\varphi_2(u_3)(x) = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\varphi_2(v_1) = \mathrm{sh}(1)v_1 + (\mathrm{ch}(1)-1)\,v_2$, $\varphi_2(v_2) = (\mathrm{ch}(1)-1)\,v_1 + \mathrm{sh}(1)v_2$, $\varphi_2(v_3) = 0_E$. Ainsi,

$$\boxed{C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1)-1 & 0 \\ \mathrm{ch}(1)-1 & \mathrm{sh}(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

ID.9 Par la formule de changement de bases, on a

$$\begin{aligned}
C = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi_2) &= \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(\mathrm{Id}_H)\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi_2)\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_H)\\
&= P_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi_2)P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}\\
&\boxed{C = P^{-1}BP}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\mathrm{e}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}-1 & 1-\mathrm{e}^{-1} & 0\\ \mathrm{e}-1 & -\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1)-1 & 0\\ \mathrm{ch}(1)-1 & \mathrm{sh}(1) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien,

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1)-1 & 0\\ \mathrm{ch}(1)-1 & \mathrm{sh}(1) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.}$$

Partie E : Intégration, série numérique

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{1}{1+|t|^n}.\end{aligned}$$

Dans cette partie uniquement on considère le réel x fixé dans $]1;+\infty[$ et on définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \varphi(f_n)(x).$$

IE.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+|t|^n \geqslant 1 > 0$. Donc f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc $f_n \in E$ et $\varphi(f_n)$ existe bien. On a alors

$$u_n = \varphi(f_n)(x) = \int_x^{x+1} \frac{1}{1+|t|^n}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $x > 1$, pour tout $t \in [x; x+1]$, $t \geqslant x > 1 > 0$ et donc $|t| = t$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.}$$

IE.2 On a,

$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_x^{x+1} \frac{1}{1+1}\,\mathrm{d}t = \frac{x+1-x}{2} = \frac{1}{2}\\
u_1 &= \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(|1+t|)\right]_{t=x}^{t=x+1} = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \qquad \text{car } x+2 > x+1 > 0\\
u_2 &= \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(x+1) - \arctan(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_1 = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right), \qquad u_2 = \arctan(x+1) - \arctan(x).}$$

IE.3 Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, par linéarité de l'intégrale,

$$u_n - u_{n+1} = \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^n} - \frac{1}{1+t^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t \in\in [x; x+1]$, $g(t) = \frac{1}{1+t^n} - \frac{1}{1+t^{n+1}}$. Pour tout $t \in [x; x+1]$, $t \geqslant x > 1$. Donc $t^{n+1} > t^n \Rightarrow \frac{1}{1+t^{n+1}} < \frac{1}{1+t^n}$. Donc g est strictement positive sur $[x; x+1]$. Notamment g est positive sur $[x; x+1]$ et g est continue sur $[x; x+1]$, donc par croissance de l'intégrale,

$$u_n - u_{n+1} = \int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad (\bigstar)$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Attention nous n'avons pas démontré la **stricte** décroissante de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Procédons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement décroissante. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_n - u_{n+1} \leqslant 0.$$

Donc par $(\bigstar)$,

$$u_n - u_{n+1} = \int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc la fonction g est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle. Donc g est nulle sur $[x; x+1]$ ce qui contredit sa stricte positivité sur $[x; x+1]$. Conclusion, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

IE.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [x; x+1]$, $\frac{1}{1+t^n} \geqslant 0$, donc par croissance de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0 \leftarrow$ indépendant de n. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Or par la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Donc par le théorème de convergence monotone. On en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ converge dans } \mathbb{R}}$ (et même vers une limite à valeur dans $[0; u_0] = [0; 1/2]$).

IE.5 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto 1+t^n$ est croissante sur $]1; +\infty[$ et donc sur $[x; x+1]$. Donc $t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$ est décroissante sur $[x; x+1]$: pour tout $t \in [x; x+1]$

$$\frac{1}{1+(x+1)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^n} \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_x^{x+1} \frac{1}{1+(x+1)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+(x+1)^n} \leqslant u_n \leqslant \int_x^{x+1} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{1+(x+1)^n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.}$$

IE.6 Puisque $x > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+(x+1)^n} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

IE.7 D'après la question IE.5, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$. Or $x^n + 1 > x^n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

De plus la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{x} < 1$. Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on conclut que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge}}$. De plus sa somme totale vérifie

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$