Correction du Devoir Maison 14

Solution de l'exercice I

Pour lutter contre son alcoolisme et boire un nombre limité de verres, le capitaine Haddock adopte sans équivoque le protocole ad hoc dont la doc est donnée accolée ci-dessous.

On considère une pièce ayant une probabilité $p \in]0;1[$ de tomber sur pile. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. On note alors N le rang d'apparition de ce premier pile. Dans un second temps on lance N fois la pièce et l'on note X le nombre de piles obtenus, ce nombre X correspondra alors au nombre de verres que s'autorise le capitaine. On suppose que chaque lancer de pièce est indépendant des lancers précédents.

Dans ce sujet, on pourra selon les besoins étendre toutes les formules du cours à des sommes infinies, tout en continuant à bien justifier quelle formule est utilisée.

I.1 (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il est toujours possible d'avoir un premier pile au n-ième lancer exactement. Conclusion, l'univers image de N est

$$\boxed{N(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

Nécessairement pour que l'ensemble image contienne $\mathbb{N}^*$ tout entier, $\boxed{\text{l'ensemble } \Omega \text{ ne peut pas être fini}}$. Nous sommes par conséquent en dehors du cadre du cours.

(b) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'évènement obtenir pile au i-ième lancer. Noter alors que $\overline{A_i}$ correspond à l'évènement avoir un face au i-ième lancer. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\boxed{(N = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.}$$

(c) Les lancers sont **mutuellement** indépendants. Donc, par la question précédentes,

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) = \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}\left(\overline{A_{k-1}}\right) \cdots \mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right).$$

NB : Lorsque l'indépendance n'est pas de mise, penser à la formule des probabilités composées en justifiant que $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}$ a une probabilité non nulle (pour conditionner). Or pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'un succès est donné par $\mathbb{P}(A_i) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right) = p$. Donc

$$\mathbb{P}(N = k) = p \times (1-p) \times \cdots \times (1-p) = p(1-p)^{k-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^{k-1}.}$$

(d) Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k.$$

On reconnait donc une série géométrique de raison $q = (1-p) \in]0;1[$ de valeur absolue $|q| < 1$. Par conséquent $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(N = k) \text{ est une série convergente.}}$ De plus,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) = \lim_{n\to+\infty}\left(p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k\right) = p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

On retrouve un résultat bien connu dans le cas où Ω est fini, c'est-à-dire que la famille d'évènements $(N = k)_{k\in N(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements incompatibles.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $(N = k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ sont incompatibles ou plus précisément mutuellement disjoints Donc,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N=k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k\in[\![1;n]\!]} (N=k)\right) = \mathbb{P}(N \leqslant n).$$

Donc la somme partielle d'ordre n, i.e. $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N=k)$, retourne la probabilité d'obtenir au moins un pile avant le n-ième lancer.

(f) Commençons par démontrer que l'espérance de N existe.

NB : C'est le gros problème d'un espace Ω, une variable aléatoire n'admet pas toujours (au contraire du cas Ω fini) une espérance et/ou une variance.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question I.1(c), on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1}.$$

Or, par croissance comparée, on observe que

$$k^2\left(kp(1-p)^{k-1}\right) = pk^3(1-p)^{k-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $k \geqslant k_0$, (les termes sont bien tous positifs car $p \in]0;1[$)

$$(i) \qquad 0 \leqslant kp(1-p)^{k-1} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

De plus, (ii) $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2$. Donc par le théorème de comparaison, on en déduit que

$$\sum_{k\geqslant 1} kp(1-p)^{k-1} \text{ converge}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \text{ existe.}}$$

Calculons maintenant cette somme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1}.$$

On constate que (cf exo1 TD21), par le changement d'indice $\tilde{k} = k-1$,

$$\begin{aligned} S_n = p\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(1-p)^k &= p(1-p)\sum_{k=0}^{n-1} k(1-p)^{k-1} + p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k \\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1} + p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k. \end{aligned}$$

On reconstruit S_n dans la première somme et on reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $q = 1-p \in]0;1[$ dans la seconde somme :

$$S_n = (1-p)\left(S_n - np(1-p)^{n-1}\right) + p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)S_n - np(1-p)^n + p\frac{1-(1-p)^n}{p}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_n(1-(1-p)) = -np(1-p)^n + 1 - (1-p)^n \quad &\Leftrightarrow \quad pS_n = 1-(n+1)(1-p)^n \\ &\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{1-(n+1)(1-p)^n}{p}. \end{aligned}$$

Or par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty}(n+1)(1-p)^n = 0$. On retrouve donc que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ i.e. la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(N=k)$ converge et de plus

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-(n+1)(1-p)^n}{p} = \frac{1}{p}. \qquad (\bigstar)$$

Conclusion, $\mathbb{E}(N)$ existe et

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{1}{p}.}$$

I.2 (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Sachant $N=n$, on lance de façons indépendantes et identiques n fois la pièce et l'on note le nombre de succès, cela correspond donc à la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ c'est-à-dire X suit une loi binomiale de paramètre n et p : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\text{la loi conditionnelle de } X \text{ sachant } N=n \text{ est une loi binomiale } \mathscr{B}(n,p).}$$

(b) Déterminer une loi c'est

(i) préciser son univers image (non nécessairement optimal, éventuellement avec quelques évènements négligeables)

(ii) donner ses probabilités élémentaires pour tous les éléments de l'univers image.

On a déjà vu que $N(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Suivant ces valeurs, X peut aussi prendre des valeurs aussi grandes que possibles (j'en connais un qui serait alors pas très frais...) mais aussi la valeur nulle (voilà un résultat plus raisonnable) : aucun succès sur les $N=n$ lancer. Donc

$$\boxed{N(\Omega)\times X(\Omega) = \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}.$$

De plus pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N=i)\neq 0$ donc

$$\mathbb{P}((N=j)\cap(X=i)) = \mathbb{P}(X=i \mid N=j)\,\mathbb{P}(N=j).$$

Or sachant $N=j$, on sait par la question précédente que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(j,p)$. Donc

$$\mathbb{P}((N=j)\cap(X=i)) = \begin{cases}\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i}\,\mathbb{P}(N=j) & \text{si } i\leqslant j\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Or par la question I.1(c), $\mathbb{P}(N=j) = p(1-p)^{j-1}$. Finalement, on obtient

$$\boxed{\forall (i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N},\quad \mathbb{P}((N=j)\cap(X=i)) = \begin{cases}\binom{j}{i}p^{i+1}(1-p)^{2j-i-1} & \text{si } i\leqslant j\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}}$$

I.3 (a) Soient $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\,]-1;1[$.

i. Soit $n\geqslant k$, alors $\binom{n+k}{k}|x|^n\geqslant 0$. Montrons donc que $\binom{n+k}{k}|x|^n\leqslant\frac{2^k}{k!}n^k|x|^n$. On a

$$\binom{n+k}{k}|x|^n = \frac{(n+k)!}{k!n!}|x|^n = \frac{n!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!n!}|x|^n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{n!}|x|^n.$$

Or pour tout $i\in[\![1;k]\!]$, $n+i\leqslant n+k\leqslant n+n=2n$ car $k\leqslant n$. Donc,

$$\binom{n+k}{k}|x|^n \leqslant \frac{\overbrace{(2n)(2n)\cdots(2n)}^{k\text{ fois}}}{n!}|x|^n = \frac{2^kn^k}{k!}|x|^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\geqslant k,\quad 0\leqslant\binom{n+k}{k}|x|^n\leqslant\frac{2^k}{k!}n^k|x|^n.}$$

ii. Par la question précédente,

$$\forall n \geqslant k, \quad 0 \leqslant n^2 \binom{n+k}{k} |x|^n \leqslant \frac{2^k}{k!} n^{k+2} |x|^n .$$

De plus, par croissance comparée,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^k}{k!} n^{k+2} |x|^n = \frac{2^k}{k!} \lim_{n\to+\infty} n^{k+2} |x|^n = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement (pour les suites !), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \binom{n+k}{k} |x|^n = 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui dépend certainement de k et x), tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \binom{n+k}{k} |x|^n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

De plus $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2$. Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n+k}{k} x^n \text{ converge.}}$$

(b) Soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in]-1;1[$ par $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

i. Le dénominateur ne s'annulant pas sur $]-1;1[$, la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathscr{P}_k \qquad \text{« } \forall x \in]-1;1[\,, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}. \text{ »}$$

Démontrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_k$ est vraie.

- *Initialisation.* Si $k = 0$, alors pour tout $x \in]-1;1[$, $f^{(0)}(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{0!}{(1-x)^{0+1}}$. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie. Alors pour tout $x \in]-1;1[$, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$. L'égalité étant vrai pour tout $x \in]-1;1[$, on peut la dérivée et alors :

$$\forall x \in]-1;1[\,, \quad {f^{(k)}}'(x) = \frac{k!\,(-(k+1))\,(1-x)'}{(1-x)^{k+2}} = \frac{k!\,(-(k+1))\,(-1)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}.$$

Donc $\forall x \in]-1;1[$, $f^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est aussi vraie.
- *Conclusion*, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $x \in]-1;1[$, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[\,, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.}$$

ii. Soit $x \in]-1;1[$. On sait qu'en tant que somme totale d'une série géométrique de raison x tel que $|x| < 1$, on a

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

De plus, en notant $e_n : x \mapsto x^n$, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1;1[\,, \quad e_n^{(k)}(x) = \begin{cases} n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)\,x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc en dérivant k-fois l'expression ($\bigstar\bigstar$) (l'énoncé nous donne son feu vert pour affirmer que la dérivée de la somme **infinie** est la somme infinie des dérivées, ce qui n'est pas sinon autorisé), on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1;1[\,, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n^k(x).$$

Et par ce qui précède,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-1;1\right[,\quad \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

En divisant les deux membres par $k!(\neq 0)$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-1;1\right[,\quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Par le changement d'indice $\tilde{n} = n-k$, on conclut que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-1;1\right[,\quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^{n}.}$$

I.4 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $(N=n)$ forment un système complet d'évènements incompatibles. Donc par la formule des probabilités totales (ici dans sa version infinie, admise),

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X=k)\cap(N=n)\right).$$

Donc d'après la loi conjointe donnée en I.2(b), seuls les termes où $k \leqslant n$ sont non négligeables, on a donc

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X=k)\cap(N=n)\right).$$

NB : cette formule est fausse si $k=0$ car dans ce cas on ajouterait illégalement le terme $n=0$.

Donc toujours par la loi conjointe de I.2(b),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^{k+1}(1-p)^{2(n+k)-k-1}\\ &= p^{k+1}(1-p)^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} (1-p)^{2n}.\end{aligned}$$

Or en posant $x=(1-p)^2$, on a $0<1-p<1$ donc $0<x<1$ par stricte croissance de la fonction carrée sur $[0;1]$. Donc par la question précédente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} (1-p)^{2n} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{\left(1-(1-p)^2\right)^{k+1}} = \frac{1}{(p(2-p))^{k+1}}.$$

Par conséquent, on trouve bien

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

Maintenant si $k=0$, alors de la même façon, par la loi conjointe de déterminer à la question I.2(b),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X=0)\cap(N=n)\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^{0+1}(1-p)^{2n-0-1}\\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0}(1-p)^{2n}\\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0}(1-p)^{2n} - \frac{p}{1-p}.\end{aligned}$$

Donc par la question précédente, avec $k=0$ et $x=(1-p)^2 \in]0;1[$, on obtient cette fois,

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{p}{(1-p)}\frac{1}{(1-x)^{0+1}} - \frac{p}{(1-p)} = \frac{p}{(1-p)}\frac{1}{\left(1-(1-p)^2\right)} - \frac{p}{1-p} = \frac{p}{1-p}\frac{1}{p(2-p)} - \frac{p}{(1-p)}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1-p(2-p)}{(1-p)(2-p)} = \frac{1-2p+p^2}{(1-p)(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=0) = \frac{1-p}{2-p}.}$$

Définition I.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dénombrable et V une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que V suit une loi géométrique de paramètre $\lambda \in]0;1[$, noté $V \hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda)$ si et seulement si

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(V=k) = (1-\lambda)^{k-1}\lambda.$$

I.5 Soient U une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre λ. On suppose U et V indépendantes et on pose enfin $Y = UV$.

(a) Puisque U et V sont indépendantes, on sait d'après le cours que $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$ i.e. les variables U et V sont non corrélées. Donc

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V).$$

D'une part $U \hookrightarrow \mathscr{B}(\lambda)$, donc $\mathbb{E}(U) = \lambda$. D'autre part $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda)$ donc

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(V=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\,\lambda(1-\lambda)^{k-1}.$$

Nous avons déjà mené ce calcul : par ($\bigstar$), on a

$$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{\lambda}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \lambda\frac{1}{\lambda} = 1.}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $(U=0)$ et $(U=1)$ forme un système complet d'évènements incompatibles non négligeables. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}(UV=k) \\
&= \mathbb{P}(UV=k \mid U=0)\mathbb{P}(U=0) + \mathbb{P}(UV=k \mid U=1) \\
&= \mathbb{P}(0=k \mid U=0)(1-\lambda) + \mathbb{P}(V=k \mid U=1)\lambda && \textit{car } U \hookrightarrow \mathscr{B}(\lambda) \\
&= 0 + \lambda\,\mathbb{P}(V=k) && \textit{car } U \textit{ et } V \textit{ sont indépendantes} \\
&= \lambda^2(1-\lambda)^{k-1} && \textit{car } V \hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda).
\end{aligned}$$

Si maintenant $k=0$ on a de même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(UV=0) &= \mathbb{P}(UV=0 \mid U=0)\mathbb{P}(U=0) + \mathbb{P}(UV=0 \mid U=1)\mathbb{P}(U=1) \\
&= 1 \times (1-\lambda) + \underbrace{\mathbb{P}(V=0 \mid U=1)}_{=0}\lambda \\
&= 1-\lambda.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y=k) = \begin{cases} \lambda^2(1-\lambda)^{k-1} & \text{si } k \neq 0 \\ 1-\lambda & \text{si } k=0. \end{cases}}$$

NB : on peut vérifier que notre résultat est cohérent en vérifiant que $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k) = 1$. *En effet, on a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k) = 1-\lambda + \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda^2(1-\lambda)^{k-1} = 1-\lambda+\lambda^2\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\lambda)^k.$$

On reconnait une somme totale d'une série géométrique de raison $1-\lambda \in]0;1[$*,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k) = 1-\lambda+\lambda^2 \frac{1}{1-(1-\lambda)} = 1-\lambda+\lambda = 1.$$

(c) On admet que $\mathbb{V}(V) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2}$. On a alors par la formule de Koenig-Huygens *(ne pas oublier de la citer)*

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}(Y)^2.$$

Par la question (a),

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - 1^2 = \mathbb{E}\left(U^2V^2\right) - 1.$$

Or U et V sont indépendantes. Donc par une propriété du cours, U^2 et V^2 sont indépendantes. Donc U^2 et V^2 sont non corrélées et $\mathbb{E}\left(U^2V^2\right) = \mathbb{E}\left(U^2\right)\mathbb{E}\left(V^2\right)$ Donc

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left(U^2\right)\mathbb{E}\left(V^2\right) - 1.$$

Or d'une part, toujours par la formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{E}\left(U^2\right) = \mathbb{V}(U) + \mathbb{E}(U)^2 = \lambda(1-\lambda) + \lambda^2 = \lambda$. D'autre part, on a vu également dans la question (a) que $\mathbb{E}(V) = \frac{1}{\lambda}$. Donc par la formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{E}\left(V^2\right) = \mathbb{V}(V) + \mathbb{E}(V)^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2-\lambda}{\lambda^2}$. Ainsi,

$$\mathbb{V}(Y) = \lambda\frac{2-\lambda}{\lambda^2} - 1 = \frac{2-\lambda-\lambda}{\lambda} = 2\frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = 2\frac{1-\lambda}{\lambda}.}$$

I.6 *Analyse.* On cherche λ tel que X ait même loi que UV avec $U \hookrightarrow \mathscr{B}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda)$. On sait d'après I.4 que $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1-p}{2-p}$ et d'après la question précédente, $\mathbb{P}(UV=0) = 1-\lambda$. Donc si X et UV ont même loi, alors

$$\frac{1-p}{2-p} = 1-\lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 1 - \frac{1-p}{2-p} = \frac{2-p-1+p}{2-p} = \frac{1}{2-p}.$$

Synthèse. Posons $\lambda = \frac{1}{2-p}$. Soient $U \hookrightarrow \mathscr{B}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda)$. Alors

$$(i) \qquad (UV)(\Omega) = \mathbb{N} = X(\Omega).$$

De plus,

$$\mathbb{P}(UV=0) = 1-\lambda = 1-\frac{1}{2-p} = \frac{1-p}{2-p} = \mathbb{P}(X=0)$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(UV=k) = \lambda^2(1-\lambda)^{k-1} = \frac{1}{(2-p)^2}\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} = \mathbb{P}(X=k).$$

Donc

$$(ii) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(UV=k) = \mathbb{P}(X=k).$$

Donc par (i) et (ii),

on conclut que X a la même loi qu'un produit de deux variables U et V, indépendantes, où $U \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2-p}\right)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2-p}\right)$.

I.7 Soient $U \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2-p}\right)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2-p}\right)$ deux variables aléatoires indépendantes. Posons $Y = UV$. Alors par la question précédente, X et Y ont la même loi. Donc

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y).$$

Donc par la question I.5(a), on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1.}$$

Le capitaine aura beau prendre n'importe quelle valeur de p, il ne boira en moyenne qu'un seul verre (ce qui lui évitera de se faire happer par Adonis).

I.8 *Facultative.* La probabilité que X soit plus grand que 3 est donné par $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|X(\omega) - 1| \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} X(\omega) - 1 \geqslant 2 \\ \text{ou} \\ X(\omega) - 1 \leqslant -2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} X(\omega) \geqslant 3 \\ \text{ou} \\ X(\omega) \leqslant -1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) \geqslant 3.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3) = \mathbb{P}(|X - 1| \geqslant 2) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 2)$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{4}.$$

Or de même que dans la question précédente, X a même loi que $Y = UV$ donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = 2\frac{1-\lambda}{\lambda}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3) \leqslant 2\frac{1-p}{4p} = \frac{1-p}{2p}.$$

Résolvons l'inégalité d'inconnue $\lambda \in]0;1[$ suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1-\lambda}{2\,\lambda} \leqslant 0,1 \quad &\Leftrightarrow \quad 10 - 10\,\lambda \leqslant 2\,\lambda \qquad \textit{car } \lambda > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 10 \leqslant 12\,\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{5}{6} \leqslant \lambda\,. \end{aligned}$$

Conclusion, si Tintin prend une valeur de p entre $\left[\frac{5}{6};1\right[$, alors le capitaine a une probabilité inférieure à $0,1$ de boire plus de trois verres.