Corrigé du Devoir Maison 4

Solution de l'exercice I

I.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\sqrt{|x^2-4|} \leqslant |x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad \left|x^2-4\right| \leqslant (x-1)^2 \qquad \text{par positivité des termes manipulés.}\\
&\Leftrightarrow \quad -(x-1)^2 \leqslant x^2-4 \leqslant (x-1)^2\\
&\Leftrightarrow \quad -x^2+2x-1 \leqslant x^2-4 \leqslant x^2-2x+1\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2-2x-3 \geqslant 0\\ 2x-5 \leqslant 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-x-\frac{3}{2} \geqslant 0\\ x \leqslant \frac{5}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x^2-x-\frac{3}{2}$. On a

$$\Delta = 1+4\frac{3}{2} = 7 > 0.$$

L'inéquation $x^2-x-\frac{3}{2} \geqslant 0$ admet donc pour solution :

$$x \leqslant \frac{1-\sqrt{7}}{2} \qquad \text{OU} \qquad x \geqslant \frac{1+\sqrt{7}}{2}.$$

Ainsi,

$$\sqrt{|x^2-4|} \leqslant |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant \frac{1-\sqrt{7}}{2} \quad \text{OU} \quad x \geqslant \frac{1+\sqrt{7}}{2}\\ x \leqslant \frac{5}{2} \end{cases}$$

Or $\frac{1+\sqrt{7}}{2} < \frac{1+3}{2} = 2 < \frac{5}{2}$. Par conséquent

$$\sqrt{|x^2-4|} \leqslant |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{1-\sqrt{7}}{2} \quad \text{OU} \quad \frac{1+\sqrt{7}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5}{2}\right].}$$

I.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le cours,

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}.$$

Or d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} 1^j 1^{i-j} = (1+1)^i = 2^i$. Ainsi,

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $2 \neq 1$. Donc

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{i}{j} = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{i}{j} = 2^{n+1}-1.}$$

I.3 Pour tout $k \geqslant 2$, on remarque que $\frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$. Posons pour tout $k \geqslant 2$, $u_k = \frac{k-1}{k}$. Alors pour tout $k \geqslant 2$, $\frac{k^2-1}{k^2} = \frac{u_k}{u_{k+1}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par ce qui précède,

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}}.$$

Reconnaissant un produit télescopique, on obtient

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{u_2}{u_{n+1}} = \frac{2-1}{2} \times \frac{n+1}{n+1-1}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{n+1}{2n}.}$$

I.4 (a) Pour simplifier $\sqrt{16+8\sqrt{3}}$, on commence par factoriser par 4 (qui étant un carré pourra sortir de la racine) puis l'on reconnaît un carré :

$$\sqrt{16+8\sqrt{3}} = \sqrt{4\left(4+2\sqrt{3}\right)} = 2\sqrt{1+3+2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = 2\left|1+\sqrt{3}\right|.$$

Naturellement $1+\sqrt{3}$ est positif et donc

$$\boxed{\sqrt{16+8\sqrt{3}} = 2\left(1+\sqrt{3}\right).}$$

(b) Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation

$$4\cos^2(x) + \left(2-2\sqrt{3}\right)\cos(x) - \sqrt{3} \leqslant 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \cos(x)$. On a l'équivalence suivante :

$$x \in \mathscr{S} \quad \Leftrightarrow \quad 4X^2 + \left(2-2\sqrt{3}\right)X - \sqrt{3} \leqslant 0.$$

Notons Δ le discriminant associé à $4X^2 + \left(2-2\sqrt{3}\right)X - \sqrt{3}$. On a

$$\Delta = \left(2-2\sqrt{3}\right)^2 + 4 \times 4 \times \sqrt{3} = 4 - 8\sqrt{3} + 4 \times 3 + 16\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3} > 0.$$

D'après la question (I.4a), on en déduit que $\sqrt{\Delta} = 2\left(1+\sqrt{3}\right)$. Les racines de $4X^2 + \left(2-2\sqrt{3}\right)X - \sqrt{3}$ sont donc

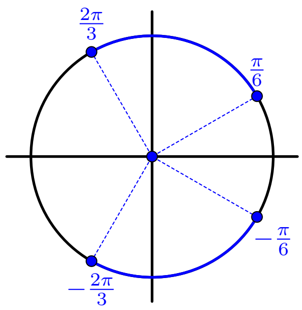
$$\frac{-2+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}}{2\times 4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-2+2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{S} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{OU} \\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right].}$$



Exercice II (S'entrainer)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto \frac{\ln^n(x)}{n!x^2}$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie A : Etude des f_n.

IIA.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que $\ln(x)$ et $\frac{1}{x^2}$ existent (simultanément) il faut et il suffit que $x > 0$. Par conséquent, pour que $f(x)$ existe, il faut et il suffit que $x > 0$.

$$\boxed{\mathscr{D}_n =]0; +\infty[.}$$

IIA.2 Par croissance comparée pour $a = n > 0$ et $b = 2 > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^n(x)}{x^2} = 0$. Si $n = 0$, on obtient encore $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^n(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Par conséquent,

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0.$$

et la courbe représentative de f_n admet une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$.

IIA.3 On sait dans tous les cas que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{n!x^2} = +\infty$. Observons le comportement de $x \mapsto \ln^n(x)$ en 0.

- Si $n \geqslant 2$ est pair alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln^n(x) = +\infty$ et par produit,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x) = +\infty.$$

- Si $n = 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln^n(x) = 1$ et par produit,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_0(x) = +\infty.$$

- Si n est impair alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln^n(x) = -\infty$ et par produit,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x) = -\infty.$$

Conclusion :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Dans tous les cas le graphe de la fonction f_n admet une tangente verticale d'équation $x = 0$.

IIA.4 La fonction f_n est dérivable sur $\mathscr{D}_n = \mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition. De plus, si $n \geqslant 1$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f_n'(x) &= \frac{n\frac{1}{x}\ln^{n-1}(x)x^2 - \ln^n(x)2x}{n!x^4} \\ &= \frac{nx\ln^{n-1}(x) - 2x\ln^n(x)}{n!x^4} \\ &= \frac{x\ln^{n-1}(x)\left(n - 2\ln(x)\right)}{n!x^4} \\ &= \frac{\ln^{n-1}(x)\left(n - 2\ln(x)\right)}{n!x^3}. \end{aligned}$$

Si $n = 0$, on a pour tout $x > 0$, $f_0(x) = \frac{1}{x^2}$ et donc

$$\forall x > 0, \quad f_0'(x) = \frac{-2}{x^3}.$$

Conclusion, la fonction f_n est dérivable sur $\mathscr{D}_n =]0;+\infty[$ et

$$\forall x>0, \quad f_n'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^3} & \text{si } n=0 \\ \frac{\ln^{n-1}(x)(n-2\ln(x))}{n!x^3} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

IIA.5 On suppose $n \geqslant 1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On sait alors que $x^3>0$. Donc, d'après ce qui précède on a les équivalences suivantes :

$$f_n'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln^{n-1}(x)\,(n-2\ln(x)) \geqslant 0$$

- Premier cas : n est impair et donc $n-1$ est pair. Alors $\ln^{n-1}(x) \geqslant 0$. Donc

$$f_n'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad n-2\ln(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 2\ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant e^{\frac{n}{2}}.$$

Calculons alors $f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$. On a

$$f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{\ln^n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)}{n!\left(e^{\frac{n}{2}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!\,e^n} = \frac{n^n}{n!2^n\,e^n}.$$

On en déduit alors le tableau de variations suivant :

x	0		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f_n	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n^n}{n!2^n\,e^n}$	$\searrow$	0

- Second cas : n est pair et donc $n-1$ est impair. Alors,

$$\begin{aligned}
f_n'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln^{n-1}(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad n-2\ln(x) \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ \ln^{n-1}(x) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad n-2\ln(x) \leqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \ln(x) \leqslant \frac{n}{2} \\ \text{ou} \\ \ln(x) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \ln(x) \geqslant \frac{n}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{n}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x \leqslant e^{\frac{n}{2}} \qquad \text{par croissance de l'exponentielle.}
\end{aligned}$$

Nous avons déjà vu précédemment (ce qui reste vrai pour n impair) que $f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{n^n}{n!2^n\,e^n}$. De plus $f_n(1) = \frac{\ln^n(1)}{n!(1)^2} = 0$. Par conséquent, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{n^n}{n!2^n\,e^n}$	$\searrow$	0

Partie B : Détermination de la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

IIB.1 La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et notamment sur $[1;\mathrm{e}]$ et donc son intégrale sur $[1;\mathrm{e}]$ existe.

$\boxed{\text{En d'autres termes le réel } I_n \text{ existe.}}$

IIB.2 Soit $t \in [1;\mathrm{e}]$. On a les implications suivantes :

$$1 \leqslant t \leqslant \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(\mathrm{e}) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \ln^n(t) \leqslant 1.$$

D'autre part,

$$1 \leqslant t \leqslant \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant t^2 \leqslant \mathrm{e}^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < n! \leqslant n!t^2 \leqslant n!\,\mathrm{e}^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{n!e^2} \leqslant \frac{1}{n!t^2} \leqslant \frac{1}{n!}$$

Les termes étant tous positifs, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{\ln^n(t)}{n!t^2} \leqslant \frac{1}{n!}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in [1;\mathrm{e}], \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{n!}.}$$

IIB.3 Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente que

$$\underbrace{\int_1^{\mathrm{e}} 0 \,\mathrm{d}t}_{=0} \leqslant \underbrace{\int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t}_{=I_n} \leqslant \underbrace{\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}t}_{=\frac{\mathrm{e}-1}{n!}}.$$

Par conséquent

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}.}$$

IIB.4 On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n!} = 0$. Dès lors, par le théorème d'encadrement et la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

Partie C : Une formule pour la constante d'Euler.

IIC.1 On a les égalités suivantes :

$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t}\right]_{t=1}^{t=\mathrm{e}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

IIC.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties à l'aide des fonctions suivantes :

$$\begin{cases} u' : t \mapsto \frac{1}{(n+1)!t^2} \\ v : t \mapsto \ln^{n+1}(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u : t \mapsto \frac{-1}{(n+1)!t} \\ v' : t \mapsto \frac{n+1}{t}\ln^n(t) \end{cases}$$

Plus rigoureusement on pose pour tout $t \in [1;e]$,

$$u(t) = \frac{-1}{(n+1)!t} \qquad \text{et} \qquad v(t) = \ln^{n+1}(t).$$

Ces deux fonctions sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1;e]$ et

$$\forall t \in [1;e], \quad u'(t) = \frac{1}{(n+1)!t^2} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{n+1}{t}\ln^n(t).$$

On obtient alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^{n+1}(t)}{(n+1)!t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-1}{(n+1)!t} \times \ln^{n+1}(t)\right]_{t=1}^{t=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{-1}{(n+1)!t}\frac{n+1}{t}\ln^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{(n+1)!\,\mathrm{e}} + 0 + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n(t)}{n!t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule voulue

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!\,\mathrm{e}} + I_n.} \tag{1}$$

IIC.3 Démontrons la formule par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$ la propriété « $I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} + I_0$ ».
Initialisation. Si $n = 0$ alors $I_{n+1} = I_1$. Donc d'après (1),

$$I_1 = -\frac{1}{(1)!\,\mathrm{e}} + I_0 = -\frac{1}{\mathrm{e}} + I_0 = -\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k!} + I_0.$$

Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors, d'après (1),

$$I_{n+2} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{(n+2)!} + I_{n+1}.$$

Donc par $P(n)$, l'hypothèse de récurrence, on a

$$I_{n+2} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} + I_0 = -\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k!} + I_0.$$

Par conséquent $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie i.e.

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} + I_0.}$$

IIC.4 Soit $n \geqslant 1$. En utilisant la question précédente, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \mathrm{e}\left(I_0 - I_n\right).$$

Or d'après la question IIB.4, on sait que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \mathrm{e}\, I_0.$$

Or d'après la question IIC.1, $I_0 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1 + \mathrm{e} - 1.$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}\,.}$$

IIC.5 On admet $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1}\,.$$

(on dit que $\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et converge vers la même limite.) De même d'après la question IIC.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}\,.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n}\left[\frac{1}{k!}+\frac{(-1)^k}{k!}\right]=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k!}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}=\mathrm{e}^1+\mathrm{e}^{-1}=2\operatorname{ch}(1)$$

D'autre part, si k est un entier pair, $\frac{1}{k!}+\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{2}{k!}$ et si k est un entier impair $\frac{1}{k!}+\frac{(-1)^k}{k!}=0$. Soit $n\in\mathbb{N}$. On déduit des considérations précédentes les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{2n}\left[\frac{1}{k!}+\frac{(-1)^k}{k!}\right]=\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\text{ pair}}}\left[\frac{1}{k!}+\frac{(-1)^k}{k!}\right]+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\text{ impair}}}\left[\frac{1}{k!}+\frac{(-1)^k}{k!}\right]=\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\text{ pair}}}\frac{2}{k!}=2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}.$$

Par suite,

$$2\operatorname{ch}(1)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n}\left[\frac{1}{k!}+\frac{(-1)^k}{k!}\right]=\lim_{n\to+\infty}2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}=2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}$$

et on conclut que

$$\boxed{\operatorname{ch}(1)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}.}$$

Exercice III (S'entrainer)

Soit f la fonction définie par $f : x\mapsto \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.

III.1 Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$x\in\mathscr{D}_f \qquad\Leftrightarrow\qquad \mathrm{e}^x+1\neq 0.$$

Or $\mathrm{e}^x>0$ et donc $\mathrm{e}^x+1>0$. Par conséquent

$$\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}.}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On remarque que

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+1-2}{\mathrm{e}^x+1}=1-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}. \tag{2}$$

Or on a les implications suivantes :

$$\mathrm{e}^x+1>1 \qquad\Rightarrow\qquad 0\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\leqslant 1 \qquad\Rightarrow\qquad 0\geqslant\frac{-2}{\mathrm{e}^x+1}\geqslant -2$$

Ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad -1\leqslant f(x)\leqslant 1$$

et la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

III.2 L'ensemble $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$ est bien sûr centré en 0. De plus pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}-1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1}=\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=-\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=-f(x).$$

On en déduit que la fonction f est impaire.

III.3 En utilisant (2), on a

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}=1.$$

Le graphe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$. Par parité on obtient également que

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1.$$

et le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=-1$ en $-\infty$.

III.4 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x (\mathrm{e}^x + 1) - (\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x (\mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}^x + 1)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

On observe que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ et par conséquent $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	1

III.5 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et par la question précédente est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le théorème de la bijection,

$\boxed{f \text{ définie une bijection de }]-\infty;+\infty[\text{ dans } \left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-1;1[. \text{ De plus la réciproque } f^{-1} \text{ est continue et strictement croissante sur }]-1;1[.}$

III.6 Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On pose $u(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

(a) On a immédiatement $\boxed{\mathrm{e}^x = \frac{u(x)+v(x)}{2}}$.

(b) D'après la question III.4, $f'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$. Par conséquent

$$f'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{v(x)^2}$$

et d'après la question précédente,

$$f'(x) = \frac{2\frac{u(x)+v(x)}{2}}{v(x)^2} = \frac{u(x)+v(x)}{v(x)^2}.$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)} + 1\right)\frac{1}{v(x)}.}$$

(c) Par définition de $u(x)$ et $v(x)$, $\boxed{1 = \frac{v(x)-u(x)}{2}.}$

(d) Des questions précédentes, on obtient

$$f'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)} + 1\right)\frac{1}{v(x)} = \left(\frac{u(x)}{v(x)} + 1\right)\frac{\frac{v(x)-u(x)}{2}}{v(x)} = \left(\frac{u(x)}{v(x)} + 1\right)\frac{1}{2}\left(1 - \frac{u(x)}{v(x)}\right).$$

Or $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}\,(f(x)+1)\,(1-f(x)) = \frac{1-f(x)^2}{2}.}$$

III.7 On a vu à la question III.4 que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $y \in]-1;1[$,

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

En utilisant la question précédente, on obtient que pour tout $y \in]-1;1[$,

$$f^{-1}(y) = \frac{2}{1 - f\left(f^{-1}(y)\right)^2}.$$

Ainsi

$$\forall y \in]-1;1[, \quad f^{-1}(y) = \frac{2}{1-y^2}.$$

III.8 *Méthode 1.* Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1;1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = y \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x - 1 = y\left(\mathrm{e}^x + 1\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x (1-y) = y+1 \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = \frac{y+1}{1-y} \qquad \text{car } y \neq 1 \\ & \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) \qquad \text{car } y > -1 \text{ et } y < 1. \end{aligned}$$

On obtient bien une unique solution à l'équation $y = f(x)$ ce qui confirme que f est bijective et sa réciproque est alors donnée par

$$\boxed{\forall y \in]-1;1[, \quad f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

Méthode 2. On intègre la formule obtenue à la question précédente. Pour ce faire, on commence par décomposer $\left(f^{-1}\right)'$ en éléments simples et on écrit que pour tout $y \in]-1;1[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{2}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}.$$

Donc en intégrant cette égalité (les fonctions sont continues sur $]-1;1[$),

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall y \in]-1;1[, \quad f^{-1}(y) = -\ln(1-y) + \ln(1+y) + C = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + C,$$

car pour tout $y \in]-1;1[$ $1-y>0$ et $1+y>0$. De plus $f(0) = \frac{1-1}{1+1} = 0$. Donc $f^{-1}(0) = 0 = \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) + C = 0$. On en déduit que $C = 0$ et l'on conclut à nouveau que

$$\boxed{\forall y \in]-1;1[, \quad f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$