Devoir Maison 5

A faire pour le jeudi 20/12

Exercice I (Restituer)

I.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin(x) \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{E}$$

I.2 Soient $I =]1; +\infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}.$$

(a) Montrer qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout $x > 1$,

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{cx + d}{x^2 + 3}.$$

(b) En déduire les primitives de f sur I.

Introduction aux développements limités et application

Définition I.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. On dit que f admet un développement limité en 0 d'ordre n s'il existe $\varepsilon_n : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_n(x) = 0$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n\, \varepsilon_n(x).$$

Les deux exercices suivants tournent autour du fait que la fonction exponentielle admet un développement limité à tout ordre. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{n \to 0} \varepsilon_n(0) = 0$ et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n\, \varepsilon_n(x), \tag{$\bigstar$}$$

L'exercice 2 utilise cette formule pour déterminer une solution à un problème de raccord et l'exercice 3 a pour but de la démontrer.

Exercice II (S'entrainer)

On considère l'équation (E) d'inconnue une fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|\, y'(x) - (x+1) y(x) = x^2. \tag{E}$$

On définit également les équations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x|\, y'(x) - (x+1) y(x) = x^2, \tag{E^+}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x|\, y'(x) - (x+1) y(x) = 0, \tag{E_0^+}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad |x|\, y'(x) - (x+1) y(x) = x^2, \tag{E^-}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad |x|\, y'(x) - (x+1) y(x) = 0. \tag{E_0^-}$$

et on note respectivement $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}^+$, $\mathscr{S}_0^+$, $\mathscr{S}^-$ et $\mathscr{S}_0^-$ les solutions de (E), (E^+), (E_0^+), (E^-) et (E_0^-).

Partie A : Solutions de (E^+)

IIA.1 Résoudre (E_0^+).

IIA.2 A l'aide de la méthode de variation de la constante, démontrer que

$$\mathscr{S}^+ = \left\{ \begin{array}{rl} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto -x + Cx\,\mathrm{e}^x \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Partie B : Solutions de (E^-)

IIB.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

IIB.2 Résoudre (E_0^-).

IIB.3 A l'aide des questions précédentes, appliquer la méthode de variation de la constante pour démontrer que

$$\mathscr{S}^- = \left\{ \begin{array}{rl} \mathbb{R}_-^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto -x + 2 + \frac{C\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Partie C : Raccordement

Soit $y \in \mathscr{S}$.

IIC.1 Déterminer $y(0)$.

IIC.2 Justifier qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} -x + Ax\,\mathrm{e}^x & \text{si } x > 0 \\ y(0) & \text{si } x = 0 \\ -x + 2 + \frac{B\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

IIC.3 Soit $C \in \mathbb{R}$. Déterminer en justifiant et suivant les valeurs de C, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{C\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x}$.

IIC.4 En déduire que $B = 2$.

IIC.5 A l'aide de la relation ($\bigstar$), démontrer qu'il existe $\varepsilon_3 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = -\frac{x^2}{3} + x^2\,\varepsilon_3(x),$$

IIC.6 Démontrer alors que y est alors bien continue sur $\mathbb{R}$, et ce quelque soit la valeur de A.

IIC.7 Déterminer la valeur de A pour que y soit bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

IIC.8 Démontrer qu'il existe $\varepsilon_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = x^2 + x^2\,\varepsilon_1(x).$$

Exercice III (Découvrir)

On souhaite démontrer ($\bigstar$) id est que la fonction exponentielle admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

III.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

III.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $J = [0; x]$ si $x \geqslant 0$ et $J = [x; 0]$ si $x \leqslant 0$. Démontrer que la fonction $i_n : t \mapsto \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t$ est bornée sur J et déterminer un majorant de $|i_n|$ sur J.

III.3 Soit $x \in \mathbb{R}$ Déduire de la question précédente que

$$|I_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \mathrm{e}^x .$$

Soit

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \ &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{I_n(x)}{x^n} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

III.4 Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_n(x) = 0$.

III.5 Conclure que la fonction exponentielle admet un développement limité à l'ordre n et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \, \varepsilon_n(x), \tag{$\bigstar$}$$

où ε_n est une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_n(x) = 0$.

Exercice IV (S'entrainer)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

IV.1 Calculer A^2 puis A^3.

IV.2 En déduire $A^3 - 4A^2 + A$.

IV.3 En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice V (Rechercher)

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} \, \mathrm{d}x.$$