Corrigé du Devoir Maison 5

Solution de l'exercice A

A.1 On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin(x) \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{E}$$

- Soient
$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{E_0}$$
l'équation homogène associée et
$$r^2 - 2r + 2 = 0 \tag{E_c}$$
l'équation caractéristique associée. Soit Δ son discriminant. On a
$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0.$$
L'équation (E_c) admet donc deux solutions complexes conjuguées : $r = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i$. On en déduit l'ensemble des solutions de (E_0) :
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^x \left(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)\right) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^x \cos(x) \end{array} ; \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x) \end{array} \right).$$

- Cherchons maintenant dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une solution de l'équation
$$z'' - 2z' + 2z = \mathrm{e}^{x+ix}. \tag{E'}$$
Puisque $1+i$ est une solution simple de (E_c), on pose $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z : x \mapsto \lambda\, x\, \mathrm{e}^{x+ix}$. La fonction z est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} z'(x) &= (\lambda + (1+i)\,\lambda\, x)\,\mathrm{e}^{x+ix} \\ z''(x) &= ((1+i)\,\lambda + (1+i)\,(\lambda + (1+i)\,\lambda\, x))\,\mathrm{e}^{x+ix} = \left(2(1+i)\,\lambda + (1+i)^2\,\lambda\, x\right)\mathrm{e}^{x+ix}. \end{aligned}$$
On a alors,
$$\begin{aligned} & z \text{ solution de } (E') \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R},\ \left(2(1+i)\,\lambda + (1+i)^2\,\lambda\, x\right)\mathrm{e}^{x+ix} - 2\,(\lambda + (1+i)\,\lambda\, x)\,\mathrm{e}^{x+ix} + 2\,\lambda\, x\,\mathrm{e}^{x+ix} = \mathrm{e}^{x+ix} \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\lambda + 2i\,\lambda + 2i\,\lambda\, x - 2\,\lambda - 2\,\lambda\, x - 2i\,\lambda\, x + 2\,\lambda\, x = 1 \qquad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x+ix} \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2i\,\lambda = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = -\frac{i}{2}. \end{aligned}$$
Donc la fonction $x \mapsto -\frac{ix}{2}\,\mathrm{e}^{x+ix}$ est une solution de (E') sur $\mathbb{R}$.

- On en déduit alors les solutions de
$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin(x). \tag{E''}$$
On sait que si z est une solution de (E'), alors $\mathrm{Im}(z)$ est une solution de (E''). Or $z : x \mapsto -\frac{ix}{2}\,\mathrm{e}^{x+ix}$ est une solution de (E') et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Im}(z(x)) = \mathrm{Im}\left(-\frac{ix}{2}\,\mathrm{e}^{x+ix}\right) = -\frac{x\,\mathrm{e}^x \cos(x)}{2}.$$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0 : x \mapsto -\frac{x\,\mathrm{e}^x \cos(x)}{2}$ est une solution de (E''). Donc l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E'') sont
$$\mathscr{S} = y_0 + \mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^x \left(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)\right) - \frac{x\,\mathrm{e}^x \cos(x)}{2} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Finalement, soit y l'unique solution au problème de Cauchy (E). Alors y est notamment une solution de (E''). Donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\mathrm{e}^x\left(\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)\cos(x)+\mu\sin(x)\right).$$
En particulier,
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\,\mu=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\mu=0.$$
Donc,
$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\mathrm{e}^x\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)\cos(x).$$
La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$y'(x)=\mathrm{e}^x\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)\cos(x)-\mathrm{e}^x\,\frac{1}{2}\cos(x)-\mathrm{e}^x\left(\lambda-\frac{x}{2}\right)\sin(x).$$
Donc
$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\left(\lambda-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$
Par conséquent, $\lambda=\frac{\pi}{4}$. Dès lors, l'unique solution de (E) est donnée par
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\mathrm{e}^x\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos(x).}$$

A.2 Soient $I=]1;+\infty[$ et $f:I\to\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{x^3-x^2+3x-3}.$$

(a) Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. On a
$$\begin{aligned}\forall x>1,\qquad a+\frac{b}{x-1}+\frac{cx+d}{x^2+3}&=\frac{a\,(x-1)\left(x^2+3\right)+b(x^2+3)+(x-1)(cx+d)}{(x-1)\left(x^2+3\right)}\\&=\frac{ax^3+3ax-ax^2-3a+bx^2+3b+cx^2+dx-cx-d}{x^3+3x-x^2-3}\\&=\frac{ax^3+(-a+b+c)x^2+(3a+d-c)\,x-3a+3b-d}{x^3+3x-x^2-3}.\end{aligned}$$
Une résolution du système suivant nous donnera alors une solution :
$$\begin{cases}a=1\\-a+b+c=2\\3a+d-c=0\\-3a+3b-d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3-c\\d=c-3\\-3+9-3c-c+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3-c\\d=c-3\\9-4c=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\d=-1\\c=2.\end{cases}$$
Par conséquent, pour tout $x>1$,
$$f(x)=1+\frac{1}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+3}.$$

(b) La fonction f est continue sur I et admet donc des primitives sur I. De plus pour tout $x>1$,
$$f(x)=1+\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+3}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$
Par conséquent, F est une primitive de f sur I si et seulement si
$$\boxed{\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x>1,\quad F(x)=x+\ln(x-1)+\ln\left(x^2+3\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C.}$$

Solution de l'exercice B

On considère l'équation (E) d'inconnue une fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|\, y'(x) - (x+1)y(x) = x^2. \tag{E}$$

On définit également les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x|\, y'(x) - (x+1)y(x) = x^2, && (E^+)\\
&\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x|\, y'(x) - (x+1)y(x) = 0, && (E_0^+)\\
&\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad |x|\, y'(x) - (x+1)y(x) = x^2, && (E^-)\\
&\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad |x|\, y'(x) - (x+1)y(x) = 0. && (E_0^-)
\end{aligned}$$

et on note respectivement $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}^+$, $\mathscr{S}_0^+$, $\mathscr{S}^-$ et $\mathscr{S}_0^-$ les solutions de (E), (E^+), (E_0^+), (E^-) et (E_0^-).

Partie A : Solutions de (E^+)

BA.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|x| = x > 0$. Donc

$$(E_0^+) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) - \frac{x+1}{x} y(x) = 0.$$

La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$ en particulier la fonction $x \mapsto x + \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc y_0 est une solution de (E_0^+), si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y_0(x) = C\,\mathrm{e}^{x+\ln(x)} = Cx\,\mathrm{e}^x\,.$$

En d'autres termes,

$$\boxed{\mathscr{S}_0^+ = \left\{ y_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Cx\,\mathrm{e}^x \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array} \right).}$$

BA.2 Soient $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $y_0 : \begin{array}{cc} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x\,\mathrm{e}^x \end{array}$ et $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x\,\mathrm{e}^x}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus pour tout $x > 0$,

$$y'(x) = z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E^+) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) - \frac{x+1}{x} y(x) = x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) + \underbrace{z(x)y_0'(x) - \frac{x+1}{x} z(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0^+} = x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = \frac{x}{y_0(x)} = \frac{x}{x\,\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{car } \forall x > 0,\ y_0(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E^+) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = C - \mathrm{e}^{-x} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \left(C - \mathrm{e}^{-x}\right) x\,\mathrm{e}^x = Cx\,\mathrm{e}^x - x.
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\mathscr{S}^+ = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto -x + Cx\,\mathrm{e}^x \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie B : Solutions de (E^-)

BB.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$, puis pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = t^2 \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v'(t) = 2t \end{cases}$. Alors par intégration par parties,

$$I(x) = \left[t^2 \,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^x - \int_0^x 2t \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = x^2 \,\mathrm{e}^x - \int_0^x 2t \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

On repose alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = 2t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v'(t) = 2 \end{cases}$. Par une seconde intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} I(x) &= x^2 \,\mathrm{e}^x - \left[2t \,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^x + \int_0^x 2 \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= x^2 \,\mathrm{e}^x - 2x \,\mathrm{e}^x + \left[2 \,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^x t^2 \,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x - 2.}$$

BB.2 On a

$$(E_0^-) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y'(x) + \frac{x+1}{x} y(x) = 0.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{x+1}{x} = -1 - \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_-^*$, notamment la fonction $x \mapsto -x - \ln(|x|)$. Donc y est une solution de (E_0^-) si et seulement si

$$\exists C \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = C \,\mathrm{e}^{-x - \ln(|x|)} = \frac{C}{|x|} \,\mathrm{e}^{-x} = \frac{\tilde{C}}{x} \,\mathrm{e}^{-x},$$

avec $\tilde{C} = -C$. En d'autres termes,

$$\boxed{\mathscr{S}_0^- = \left\{ y_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{x} \,\mathrm{e}^{-x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{array} \right).}$$

BB.3 Soient $y : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$, $y_0 : \begin{array}{cc} \mathbb{R}_-^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{array}$ et $z : x \mapsto y(x) x \,\mathrm{e}^x$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et de plus pour tout $x < 0$,

$$y'(x) = z'(x) y_0(x) + z(x) y_0'(x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E^-) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad -xy'(x) - \frac{x+1}{x} y(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y'(x) + \frac{x+1}{x} y(x) = -x \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad z'(x) y_0(x) + \underbrace{z(x) y_0'(x) + \frac{x+1}{x} z(x) y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0^-} = -x \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad z'(x) = \frac{-x}{y_0(x)} = -x^2 \,\mathrm{e}^x \qquad \text{car } \forall x < 0, \ y_0(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Or d'après la question (BB.1), on sait que $x \mapsto -\left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x$ est une primitive de $x \mapsto -x^2 \,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E^-) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad z(x) = -\left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x + C \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = \frac{-\left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x + C}{x \,\mathrm{e}^x} = -x + 2 + \frac{C \,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x}. \end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$\boxed{\mathscr{S}^- = \left\{ \begin{array}{cl} \mathbb{R}_-^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto -x + 2 + \frac{C \,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie C : Raccordement

Soit $y \in \mathscr{S}$.

BC.1 Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|\, y'(x) - (x+1)y(x) = x^2$, on a notamment pour $x = 0$, $-y(0) = 0$ et donc $\boxed{y(0) = 0}$.

BC.2 Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors y est une solution de (E^+) sur $\mathbb{R}_+^*$ et de (E^-) sur $\mathbb{R}_-^*$ i.e. $y \in \mathscr{S}^+ \cap \mathscr{S}^-$. D'après la Partie A, il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,

$$y(x) = -x + Ax\,\mathrm{e}^x .$$

D'autre part, d'après la Partie C, il existe $B \in \mathbb{R}$ (attention de bien prendre un nouveau nom pour cette nouvelle constante) telle que pour tout $x < 0$,

$$y(x) = -x + 2 + \frac{B\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x}.$$

En couplant ces expressions avec la question précédente, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} -x + Ax\,\mathrm{e}^x & \text{si } x > 0 \\ y(0) = 0 & \text{si } x = 0 \\ -x + 2 + \frac{B\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

BC.3 Soit $C \in \mathbb{R}$. Premier cas : supposons que $C > 2$. Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} C\,\mathrm{e}^{-x} - 2 = C - 2 > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$. Donc, par quotient,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{C\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} = -\infty.$$

Deuxième cas, si $C < 2$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} C\,\mathrm{e}^{-x} - 2 = C - 2 < 0$ et donc,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{C\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} = +\infty.$$

Troisième cas, $C = 2$, on obtient alors une forme indéterminée mais l'on reconnait la limite du taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ qui est bien dérivable en 0. Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{2\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} = 2 \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} = 2f'(0) = -2\,\mathrm{e}^{-0} = -2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{2\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{si } C > 2 \\ -2 & \text{si } C = 2 \\ +\infty & \text{si } C < 2. \end{cases}}$$

BC.4 Puisque la fonction y considérée est une solution de (E), par définition elle est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc notamment, y est continue en 0. Par suite, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} y(x) = y(0) = 0$. Puisque $-x + 2 \xrightarrow[x \to 0]{} 2$, on déduit de la question précédente que y admet une limite finie à gauche en 0 si et seulement si $B = 2$ et alors on a bien

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} y(x) = -0 + 2 - 2 = 0.$$

$\boxed{\text{Donc il faut que } B = 2 \text{ et alors } y \text{ est continue à gauche en 0.}}$

BC.5 D'après la relation ($\bigstar$), pour $n = 3$, on sait qu'il existe une fonction $\tilde{\varepsilon}_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \tilde{\varepsilon}_3(x)$$

ou encore pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$\mathrm{e}^x = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^3 \tilde{\varepsilon}_3(-x).$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y(x) &= -x + 2 + \frac{B\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} \\
&= -x + 2 + \frac{2\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} \\
&= -x + 2 + \frac{2 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} - 2x^3 \tilde{\varepsilon}_3\,(-x) - 2}{x} \\
&= -x + 2 - 2 + x - \frac{x^2}{3} - 2x^2 \tilde{\varepsilon}_3\,(-x) \\
&= -\frac{x^2}{3} - 2x^2 \tilde{\varepsilon}_3\,(-x)\,.
\end{aligned}$$

On pose alors $\varepsilon_3 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ par $\varepsilon_3(x) = -\tilde{\varepsilon}_3\,(-x)$ et on a bien $\varepsilon_3(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. On obtient donc que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y(x) = -\frac{x^2}{3} + x^2\,\varepsilon_3(x).}$$

BC.6 On a donc par passage à la limite dans l'égalité précédente quand $x \to 0$, $x < 0$, sachant que $\varepsilon_3(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} y(x) = 0.$$

D'autre part, $\forall A \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} y(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -x + Ax\,\mathrm{e}^x = 0.$$

Enfin, $y(0) = 0$, conclusion

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 0 = y(0).$$

Donc la fonction y est continue en 0. La fonction y étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme composée de fonctions continues, on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

BC.7 Pour que la fonction y soit dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit dérivable en 0 et donc par définition que la limite de son taux d'accroissement existe. Notamment la limite à droite de son taux d'accroissement doit exister (pente à droite de la fonction). Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{-x + Ax\,\mathrm{e}^x}{x} = -1 + A\,\mathrm{e}^x\,.$$

La limite quand $x \to 0$, $x > 0$ de ce taux d'accroissement existe bien et vaut :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x} = -1 + A.$$

Mais il faut de surcroit que cette limite coïncide avec la limite à gauche de son taux d'accroissement. On a, d'après la question BC.5, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{-\frac{x^2}{3} + x^2\,\varepsilon_3(x)}{x} = -\frac{x}{3} + x\,\varepsilon_3(x).$$

Et puisque $\varepsilon_3(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x} = 0.$$

Donc pour que y soit dérivable en 0, il faut que les deux limites soient égales et donc que $-1 + A = 0$ i.e. $A = 1$. Dans ce cas, on a bien

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x} = 0.$$

$\boxed{\text{Conclusion, si } A = 1, \text{ alors } y \text{ est dérivable en 0 et } y'(0) = 0.}$

BC.8 Si $n=1$, d'après (★), on sait qu'il existe $\varepsilon_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + x\,\varepsilon_1(x).$$

Par conséquent, puisque $A=1$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) = -x + x\,\mathrm{e}^x = -x + x + x^2 + x^2\,\varepsilon_1(x) = x^2 + x^2\,\varepsilon_1(x).}$$

Exercice C (Découvrir)

On souhaite démontrer (★) id est que la fonction exponentielle admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

C.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \ I_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \ »$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Initialisation. Si $n=0$, alors on a d'une part $I_0(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = [\mathrm{e}^t]_{t=0}^{t=x} = \mathrm{e}^x - 1$. D'autre part, $\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x - 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors

$$I_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v(t) = \mathrm{e}^t. \end{cases}$ Ces fonctions sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0;x]$) et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} \\ v'(t) = \mathrm{e}^t. \end{cases}$. Donc par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x -\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= I_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Donc par hypothèse de récurrence,

$$I_{n+1}(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

C.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $J = [0;x]$ si $x \geqslant 0$ et $J = [x;0]$ si $x \leqslant 0$. Soit $t \in J$. Si $x \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant t \leqslant x \qquad \Rightarrow \qquad -x \leqslant -t \leqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant x-t \leqslant x,$$

et si $x \leqslant 0$,

$$x \leqslant t \leqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant -t \leqslant -x \qquad \Rightarrow \qquad x \leqslant x-t \leqslant 0.$$

Donc dans tous les cas, $|x-t| \leqslant |x|$. Par croissance de $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$ (et uniquement sur $\mathbb{R}_+$), on en déduit que $\frac{|x-t|^n}{n!} \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$. De plus puisque $t \in J$, on a $t \leqslant |x|$ et donc par croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$. Ainsi, pour tout $t \in J$,

$$|i_n(t)| = \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{e}^t \leqslant \frac{|x|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } t \mapsto |i_n(t)| \text{ est majorée i.e. } i_n \text{ est bornée sur } J \text{ et pour tout } t \in J,\quad |i_n(t)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}.}$$

C.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par l'inégalité triangulaire, si $x \geqslant 0$,

$$|I_n(x)| = \left|\int_0^x i_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |i_n(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Donc par croissance de l'intégrale et la question précédente (et car les bornes sont dans le bon sens)

$$|I_n(x)| \leqslant \int_0^x \underbrace{\frac{|x|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}}_{\substack{\uparrow\\ \text{indépendant de } t\,!}}\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}\int_0^x \mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}\,x.$$

De la même façon si $x \leqslant 0$,

$$|I_n(x)| \leqslant \int_x^0 |i_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^0 \frac{|x|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}(-x).$$

Donc dans tous les cas, on a

$$\boxed{|I_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}\,|x| = \frac{|x|^{n+1}}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}.}$$

Soit

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \ &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \begin{cases} \frac{I_n(x)}{x^n} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

C.4 D'après la question précédente, on a pour tout $x \neq 0$,

$$0 \leqslant \left|\frac{I_n(x)}{x^n}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n}\,\mathrm{e}^{|x|} = \frac{|x|}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}$$

Or $\frac{|x|}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ Donc par encadrement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|\frac{I_n(x)}{x^n}\right| = 0.$$

Et comme $\varepsilon_n(0) = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0.}$$

C.5 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question C.1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + I_n(x).$$

Donc par définition de ε_n,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n\,\varepsilon_n(x),$$

(vraie même si $x = 0$). Or d'après la question précédente, $\lim_{x \to 0} \varepsilon_n(x) = 0$. Donc par définition, $\boxed{\text{la fonction exponentielle admet bien un développement limité à l'ordre } n \text{ et}}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \, \varepsilon_n(x).} \qquad (\bigstar)$$

Exercice D (S'entrainer)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D.1 On a,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 14 & 40 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 27 & 14 & 40 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.}$$

D.2 D'après la question précédente, on obtient

$$A^3 - 4A^2 + A = \begin{pmatrix} 27 & 14 & 40 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 9 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{A^3 - 4A^2 + A = -6I_3.}$$

D.3 De la question précédente, on en déduit que

$$A \left(-\frac{1}{6}\right) \left(A^2 - 4A + I_3\right) = I_3.$$

Donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{6} \left(A^2 - 4A + I_3\right) \\ &= -\frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} 9 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 \\ 0 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -5/3 \\ 0 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.}$$

Exercice E (Rechercher)

Soit
$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$
Voici une solution par le changement de variable $y = \pi - x$, on a
$$I = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - y)\sin(\pi - y)}{1+\cos^2(\pi - y)}\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y)\sin(\pi - y)}{1+\cos^2(\pi - y)}\,\mathrm{d}y.$$
Or pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - y) = \sin(y)$ et $\cos(\pi - y) = -\cos(y)$ et donc
$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y)\sin(y)}{1+\cos^2(y)}\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{1+\cos^2(y)}\,\mathrm{d}y - I.$$
Par conséquent,
$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{1+\cos^2(y)}\,\mathrm{d}y = \pi\left[-\arctan(\cos(y))\right]_{y=0}^{y=\pi} = \pi\left(-\arctan(\cos(\pi)) + \arctan(\cos(0))\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}.}$$