Devoir Maison 6

A faire pour le jeudi 10/01

Exercice I (S'entrainer)

Partie A : Etude d'une matrice stochastique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

IA.1 La matrice P est-elle inversible ? Si oui, déterminer P^{-1}.

IA.2 Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, que l'on précisera.

IA.3 En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A^p = PD^pP^{-1} \qquad (\bigstar)$$

IA.4 Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, puis que sa limite $A_\infty = \lim\limits_{p\to+\infty} A^p$ est une matrice stochastique.

IA.5 (a) Justifier, sans calculer son éventuel inverse, que la matrice A est inversible.

(b) La formule $(\bigstar)$ précédemment établie est-elle encore valable pour $p = -1$?

(c) En déduire A^{-1}. *On explicitera les coefficients.*

Partie B : Une caractérisation des matrices stochastiques

Soit $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

IB.1 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

(a) Calculer AX_1. *On justifiera avec soin.*

(b) En déduire que la matrice $I_n - A$ n'est pas inversible.

IB.2 Montrer le résultat suivant :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big[\, A \text{ est stochastique} \,\big] \iff \big[\, AX_1 = X_1 \text{ et les coefficients de } A \text{ sont positifs} \,\big]$$

IB.3 En s'appuyant sur la question précédente, montrer que si A et B sont deux matrices stochastiques et que AB est une matrice à coefficients positifs, alors le produit AB est encore une matrice stochastique.

Exercice II (S'entrainer)

Le but de ce problème est de résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $I =]0, +\infty[$:

$$y''(x) - \frac{2x+3}{x(x+3)}y'(x) + \frac{2x+3}{x^2(x+3)}y(x) = x^2\ln(x)\left(3\ln(x)+2\right)(x+3) \qquad (E)$$

Pour ce faire, on considère l'équation intermédiaire (F) suivante d'inconnue φ une fonction dérivable sur I :

$$\varphi'(x) + \frac{3}{x\,(x+3)}\varphi(x) = x\ln(x)\left(3\ln(x)+2\right)(x+3) \qquad (F)$$

Partie A : Résolution de (F)

IIA.1 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (F_H) associé à (F).

IIA.2 (a) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer la dérivée de la fonction $F_{n,p}$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$F_{n,p}(x) = x^n \ln^p(x)$$

(b) En déduire une primitive sur I de la fonction f définie pour tout $x \in I$ par :

$$f(x) = x^2 \ln(x)\,(3\ln(x) + 2)$$

IIA.3 A l'aide des questions précédentes, déterminer l'ensemble des solutions de (F).

On pourra admettre dans la suite que l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (F) est donné par :

$$\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+3)x^2\ln^2(x) + A\dfrac{x+3}{x} \end{array} \;\middle|\; A \in \mathbb{R} \right\}$$

Partie B : Résolution de (E)

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I, on définit alors la fonction z sur I par :

$$\forall x \in I,\ z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

IIB.1 Montrer l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad z' \text{ solution de } (F) \text{ sur } I$$

IIB.2 Soit $x \in I$.

(a) À l'aide de deux intégrations par parties, calculer l'intégrale suivante :

$$J(x) = \int_1^x t\ln^2(t)\mathrm{d}t$$

(b) A l'aide du changement de variable $s = t^2$, en déduire l'intégrale suivante :

$$K(x) = \int_1^x t^3\ln^2(t)\mathrm{d}t$$

(c) A l'aide du changement de variable $s = t^{3/2}$, calculer l'intégrale suivante :

$$L(x) = \int_1^x t^2\ln^2(t)\mathrm{d}t$$

IIB.3 En déduire la résolution complète de (E).

Exercice III (Découvrir)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Partie A : Equivalent de S_n

IIIA.1 En utilisant la monotonie de $t \mapsto \frac{1}{t}$, démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

IIIA.2 Démontrer alors que

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}.$$

IIIA.3 Démontrer alors que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie B : Equivalent de $S_n - \ln(n)$

On pourra admettre le résultat de la question IIIA.3. On pose $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = S_n - \ln(n).$$

IIIB.1 Montrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

IIIB.2 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.

IIIB.3 En déduire que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive.

IIIB.4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

IIIB.5 En déduire que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

IIIB.6 Conclure qu'il existe $\gamma \in [0;1]$ tel que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$