Corrigé du Devoir Maison 6

Solution de l'exercice I

Partie A : Etude d'une matrice stochastique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

IA.1 On note que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 0 & \boxed{-7} \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

qui est une matrice échelonnée avec deux pivots 1 et -7. Donc $\mathrm{rg}(P) = 2$ et P est une matrice carrée de taille 2. Donc P est inversible. Calculons son inverse.

Méthode 1. On a

$$\begin{aligned} P &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 0 & \boxed{-7} \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow \frac{-1}{7} L_2 \\ &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow \frac{-1}{7} L_2 \\ &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2 \end{aligned}$$

Méthode 2. On pose $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on résout $PQ = I_2$...

> Nous avons donc montré que P est inversible et
> $$P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

IA.2 Soit $D = P^{-1}AP$. On a,

$$D = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & \frac{-7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}.$$

> Donc la matrice $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$ est bien diagonale.

IA.3 Notez que par définition de D, on a $PDP^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{=I_2} A \underbrace{PP^{-1}}_{=I_2} = A$. Montrons ($\bigstar$) par récurrence.

Initialisation. Si $p = 0$, on a $A^0 = I_2$ par définition et d'autre part $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$. Par conséquent, nous avons bien $A^0 = PD^0P^{-1}$.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^p = PD^pP^{-1}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} A^{p+1} = A^pA &= PD^pP^{-1}A \qquad \textit{par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^p \underbrace{P^{-1}P}_{=I_2} DP^{-1} \\ &= PD^pDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ on a } A^p = PD^pP^{-1}.}$

IA.4 Puisque D est diagonale, par récurrence, on peut aussi montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$D^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{-1}{6})^p \end{pmatrix}.$$

Par suite, et à l'aide de la question précédente,

$$A = PD^pP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{6}\right)^p \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \left(\frac{-1}{6}\right)^p & -\left(\frac{-1}{6}\right)^p \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3+4\left(\frac{-1}{6}\right)^p & 4-4\left(\frac{-1}{6}\right)^p \\ 3-3\left(\frac{-1}{6}\right)^p & 4+3\left(\frac{-1}{6}\right)^p. \end{pmatrix}$$

On vérifie notre calcul en prenant $p=0$, $A^0 = I_2$ ou $p=1$, $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3-\frac{2}{3} & 4+\frac{2}{3} \\ 3+\frac{1}{2} & 4-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a donc montré que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^p = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3+4\left(\frac{-1}{6}\right)^p & 4-4\left(\frac{-1}{6}\right)^p \\ 3-3\left(\frac{-1}{6}\right)^p & 4+3\left(\frac{-1}{6}\right)^p \end{pmatrix}.}$$

IA.5 La suite $\left(\left(\frac{-1}{6}\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{6}$ dont la valeur absolue est strictement plus petite que 1. Par conséquent $\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{-1}{6}\right)^p = 0$.

Donc la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est

$$A_\infty = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que la matrice A_∞ est stochastique car tous ces coefficients sont positifs et $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$.

IA.6 (a) On sait que $A = PDP^{-1}$ La matrice D est une matrice inversible d'inverse $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Les matrices P et P^{-1} sont aussi inversibles. Donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible}}$.

(b) De plus par la formule de l'inverse du produit, on obtient que

$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1}(PD)^{-1} = P\left(D^{-1}P^{-1}\right) = PD^{-1}P^{-1}.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la formule } (\bigstar) \text{ est encore vraie pour } p = -1.}$

(c) Des questions précédentes, on déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -21 & 28 \\ 21 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier notre résultat en calculant $AA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = I_2$. Finalement, on a bien

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.}$$

Partie B : Une caractérisation des matrices stochastiques

Soit $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

IB.1 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

(a) On note $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, respectivement $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coefficients de X_1, respectivement de AX_1. Nous avons notamment pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, $x_i=1$. Alors par la formule du produit, pour tout $i\in[\![1;n]\!]$,

$$y_i=\sum_{k=1}^n a_{ik}\underbrace{x_k}_{=1}=\sum_{k=1}^n a_{ik}=1 \qquad \textit{car } A \textit{ est une matrice stochastique.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit donc que } AX_1=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=X_1.}$$

(b) De la question précédente, on obtient que $(I_n-A)\,X_1=0$ avec $X_1\neq 0$. Or d'après le cours et la caractérisation de l'inversibilité, on en déduit que $\boxed{I_n-A \text{ n'est pas inversible.}}$

IB.2 Montrons que

$$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad \big[\,A\text{ est stochastique}\,\big]\Longleftrightarrow\big[\,AX_1=X_1\text{ et les coefficients de }A\text{ sont positifs}\,\big]$$

Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, par définition des matrices stochastiques, les coefficients de A sont positifs. De plus nous avons vu à la question IB.1(a) que $AX_1=X_1$. L'implication $\big[\,A$ est stochastique$\,\big]\Rightarrow\big[\,AX_1=X_1$ et les coefficients de A sont positifs$\,\big]$ est donc vraie.

Réciproquement, si $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ses coefficients soient positifs et telle que $AX_1=X_1$ alors pour démontrer que A est stochastique, il nous reste juste à démontrer que pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{ij}=1$. Puisque $AX_1=X_1$, en notant $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coefficients de X_1, on a par la formule du produit matriciel :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k=x_i \qquad\Leftrightarrow\qquad \sum_{k=1}^n a_{ik}=1.$$

Ainsi la matrice A est bien stochastique et on conclut que

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad \big[\,A\text{ est stochastique}\,\big]\Longleftrightarrow\big[\,AX_1=X_1\text{ et les coefficients de }A\text{ sont positifs}\,\big].}$$

IB.3 Soient A et B deux matrices stochastiques telles que les coefficients de AB soient positifs (on a vu en TD qu'en réalité cela est toujours vrai). Puisque A et B sont stochastiques, on a d'après la question IB.1(a), $AX_1=X_1$ et $BX_1=X_1$. Alors

$$ABX_1=AX_1=X_1.$$

Donc AB possède des coefficients positifs et vérifie $ABX_1=X_1$ donc d'après la question précédente, $\boxed{\text{la matrice } AB \text{ est stochastique.}}$

Solution de l'exercice II

Partie A : Résolution de (F)

IIA.1 L'équation homogène (F_H) associée à (F) est l'équation d'inconnue φ une fonction dérivable sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant

$$\forall x\in I,\quad \varphi'(x)+\frac{3}{x\,(x+3)}\varphi(x)=0 \qquad (F_H)$$

La fonction $x\mapsto\frac{3}{x(x+3)}$ est continue sur I et admet des primitives sur I. De plus pour tout $x\in I$, on remarque que

$$\frac{3}{x\,(x+3)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}.$$

Par conséquent, UNE primitive de $x\mapsto\frac{3}{x(x+3)}$ sur I est donnée par $x\mapsto\ln(x)-\ln(x+3)=\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (F_H) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_H=\left\{\begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)}=A\frac{x+3}{x}\end{array}\;\middle|\;A\in\mathbb{R}\right\}.}$$

IIA.2 (a) La fonction $F_{n,p}$ est définie et dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'_{n,p}(x) = nx^{n-1}\ln^p(x) + px^n\frac{1}{x}\ln^{p-1}(x).$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in I, \quad F'_{n,p}(x) = x^{n-1}\ln^{p-1}(x)\,(n\ln(x)+p)\,.}$$

(b) La fonction f est continue sur I et admet donc des primitives sur I. On remarque de plus que $f = F'_{3,2}$. Par conséquent F est une primitive de f sur I si et seulement si

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad F(x) = F_{3,2}(x) + C = x^3\ln^2(x) + C.$$

$$\boxed{\text{Notamment, la fonction } F \text{ définie pour tout } x \in I \text{ par } F(x) = x^3\ln^2(x) \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.}$$

IIA.3 On applique la méthode de variation de la constante. Soit $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par $\varphi_0(x) = \frac{x+3}{x}$. D'après la question IIA.1, la fonction φ_0 est une solution de l'équation homogène (F_H). Soit C une fonction de $I \to \mathbb{R}$ et φ la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = C(x)\,\varphi_0(x).$$

Puisque la fonction φ_0 est dérivable sur I, on observe que φ est dérivable sur I si et seulement si C est dérivable sur I. De plus,

$$\begin{aligned}
&\varphi \text{ est solution de } (F)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad C'(x)\,\varphi_0(x) + C(x)\underbrace{\left(\varphi_0'(x) + \frac{3}{x(x+3)}\,\varphi_0(x)\right)}_{=0 \text{ car } \varphi_0 \text{ solution de } (F_H)} = x\ln(x)\,(3\ln(x)+2)\,(x+3)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad C'(x) = \frac{x\ln(x)\,(3\ln(x)+2)\,(x+3)}{\varphi_0(x)} \qquad \textit{car } \varphi_0 \textit{ ne s'annule pas sur } I\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad C'(x) = x^2\ln(x)\,(3\ln(x)+2) = f(x)\\
\Leftrightarrow\quad & \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad C(x) = x^3\ln^2(x) + A \qquad \textit{d'après la question IIA.2(b)}\\
\Leftrightarrow\quad & \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad \varphi(x) = C(x)\,\varphi_0(x) = x^2\ln^2(x)(x+3) + A\frac{x+3}{x}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontrer que l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+3)x^2\ln^2(x) + A\dfrac{x+3}{x} \end{array} \,\middle|\, A \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie B : Résolution de (E)

IIB.1 Puisque pour tout $x \in I$, $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ et que y est deux fois dérivable sur I, on en déduit que z est également deux fois dérivable sur I. De plus pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
y(x) &= xz(x)\\
y'(x) &= z(x) + xz'(x)\\
y''(x) &= 2z'(x) + xz''(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad y''(x) - \frac{2x+3}{x(x+3)}y'(x) + \frac{2x+3}{x^2(x+3)}y(x) = x^2\ln(x)\,(3\ln(x)+2)\,(x+3)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad (2z'(x) + xz''(x)) - \frac{2x+3}{x(x+3)}\,(z(x) + xz'(x)) + \frac{2x+3}{x^2(x+3)}xz(x) = x^2\ln(x)\,(3\ln(x)+2)\,(x+3)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad xz''(x) + \left(2 - \frac{2x+3}{(x+3)}\right)z'(x) + \left(\frac{2x+3}{x(x+3)} - \frac{2x+3}{x(x+3)}\right)z(x) = x^2\ln(x)\,(3\ln(x)+2)\,(x+3)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad xz''(x) + \frac{3}{(x+3)}z'(x) = x^2\ln(x)\,(3\ln(x)+2)\,(x+3)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in I, \quad z''(x) + \frac{3}{x(x+3)}z'(x) = x\ln(x)\,(3\ln(x)+2)\,(x+3) \qquad \textit{car } x \neq 0 \textit{ sur } I
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré que

$$\boxed{y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff z' \text{ solution de } (F) \text{ sur } I.}$$

IIB.2 (a) Posons pour tout $t>0$, $u_1(t)=\frac{t^2}{2}$ et $v_1(t)=\ln^2(t)$. Les fonctions u_1 et v_1 sont $\mathscr{C}^1$ sur I et donc sur $[1;x]$. De plus pour tout $t>0$, $u_1'(t)=t$ et $v_1'(t)=\frac{2}{t}\ln(t)$. Donc par une intégration par parties, on obtient

$$J(x)=\int_1^x t\ln^2(t)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\ln^2(t)\right]_{t=1}^{t=x}-\int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t>0$, $u_2(t)=\frac{t^2}{2}$ et $v_2(t)=\ln(t)$. Les fonctions u_2 et v_2 sont $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t>0$, $u_2'(t)=t$ et $v_2'(t)=\frac{1}{t}$. Donc par une intégration par parties :

$$\int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_{t=1}^{t=x}-\int_1^x\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=1}^{t=x}=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

De là, on en déduit que

$$\boxed{J(x)=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}.}$$

(b) En posant $s=t^2$ i.e. $t=\sqrt{s}$ et donc $\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s$, on obtient

$$K(x)=\int_1^x t^3\ln^2(t)\mathrm{d}t=\int_1^{x^2}s^{3/2}\ln^2\left(s^{1/2}\right)\frac{1}{2\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_1^{x^2}s\left(\frac{1}{2}\ln(s)\right)^2\mathrm{d}s=\frac{1}{8}\int_1^{x^2}s\ln^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

Alors on remarque que

$$K(x)=\frac{1}{8}J\left(x^2\right)=\frac{x^4}{16}\ln^2\left(x^2\right)-\frac{x^4}{16}\ln\left(x^2\right)+\frac{x^4}{32}-\frac{1}{32}.$$

Donc

$$\boxed{K(x)=\frac{x^4}{4}\ln^2(x)-\frac{x^4}{8}\ln(x)+\frac{x^4-1}{32}.}$$

(c) En posant $s=t^{3/2}$ i.e. $t=s^{2/3}$ et donc $\mathrm{d}t=\frac{2}{3}s^{-1/3}\,\mathrm{d}s$, on obtient

$$L(x)=\int_1^x t^2\ln^2(t)\mathrm{d}t=\int_1^{x^{3/2}}s^{4/3}\ln^2\left(s^{2/3}\right)\frac{2}{3}s^{-1/3}\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\int_1^{x^{3/2}}s\ln^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

Par conséquent,

$$L(x)=\frac{8}{27}J\left(x^{3/2}\right)=\frac{4x^3}{27}\ln^2\left(x^{3/2}\right)-\frac{4x^3}{27}\ln\left(x^{3/2}\right)+\frac{2x^3}{27}-\frac{2}{27}$$

$$\boxed{L(x)=\frac{x^3}{3}\ln^2(x)-\frac{2x^3}{9}\ln(x)+\frac{2x^3}{27}-\frac{2}{27}.}$$

IIB.3 Soit y une fonction deux fois dérivable sur I et z définie pour tout $x\in I$ par $z(x)=\frac{y(x)}{x}$. On a vu à la question IIB.1 que y est une solution de (E) si et seulement si z' est une solution de (F). Donc d'après la question IIA.3, y est une solution de (E) si et seulement si

$$\exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\quad z'(x)=(x+3)x^2\ln^2(x)+A\frac{x+3}{x}.$$

Il nous faut donc intégrer z'. Soit $x\in I$. On a

$$\int_1^x(t+3)t^2\ln^2(t)+A\frac{t+3}{t}\,\mathrm{d}t=K(x)+3L(x)+A\int_1^x 1+\frac{3}{t}\,\mathrm{d}t=K(x)+3L(x)+A\left(x+3\ln(x)-1\right).$$

On en déduit que

$$\int_1^x(t+3)t^2\ln^2(t)+A\frac{t+3}{t}\,\mathrm{d}t=\left(\frac{x}{4}+1\right)x^3\ln^2(x)-\left(\frac{x}{8}+\frac{2}{3}\right)x^3\ln(x)+\frac{x^4-1}{32}+\frac{2x^3-2}{9}+A\left(x+3\ln(x)-1\right).$$

Finalement, on en déduit que y est une solution de (E) si et seulement s'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in I$,

$$\boxed{y(x)=z(x)x=\left(\frac{x}{4}+1\right)x^4\ln^2(x)-\left(\frac{x}{8}+\frac{2}{3}\right)x^4\ln(x)+\frac{x^5}{32}+\frac{2x^4}{9}+\left(A\left(x+3\ln(x)\right)+B\right)x.}$$

Exercice III (Découvrir)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Partie A : Equivalent de S_n

IIIA.1 La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [k; k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Donc par croissance de l'intégrale (et puisque les bornes sont bien ordonnées),

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$$

Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}(k+1-k) = \frac{1}{k+1}$ et de même $\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.}$$

IIIA.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'inégalité précédente, on obtient que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n.$$

Or d'une part

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = S_n - 1 + \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_{t=1}^{t=n+1} = \ln(n+1).$$

Ainsi,

$$S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n$$

D'où,

$$\boxed{\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}.}$$

IIIA.3 De la question précédente, on en déduit que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}}{\ln(n)}.$$

Or,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

Puisque $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1.$$

On en déduit également que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}}{\ln(n)} = 1 + 0.$$

Donc par encadrement, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$$

i.e.

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Partie B : Equivalent de $S_n - \ln(n)$

On pose $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = S_n - \ln(n).$$

IIIB.1 On définit la fonction g pour tout $x \in]-1;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction g est bien définie et même dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble et
$$\forall x \in]-1;+\infty[, \quad g'(x) = 1 - \frac{1+x}{=}\frac{x}{1+x}.$$
Pour tout $x > -1$, $1+x > 0$, donc $g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$. De plus, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$, $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (par croissance comparée). On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$ i.e.
$$\boxed{x \in]-1;+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.}$$

IIIB.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Donc d'après la question précédente avec $x = \frac{1}{n} \in [0;1]$,
$$\boxed{\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.}$$

IIIB.3 En sommant l'inégalité précédente, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n.$$
Or, on reconnaît à droite une somme télescopique. Donc,
$$\ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n.$$
Autrement dit,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = S_n - \ln(n) \geqslant 0.}$$

IIIB.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$e_{n+1} - e_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{e_{n+1} - e_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).}$$

IIIB.5 En utilisant la question IIIB.1, avec $x = -\frac{1}{n+1} \in]-1;0]$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$. On en déduit donc de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$e_{n+1} - e_n \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0.$$
$$\boxed{\text{Par conséquent, la suite } (e_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

IIIB.6 D'après les questions précédentes, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 (car positive). Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ notons γ cette limite. Puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, par passage à la limite, $\gamma \geqslant 0$. De plus par décroissance de la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n \leqslant e_1 = S_1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$ et donc à nouveau, par passage à la limite, $\gamma \leqslant 1$. De plus,

$$\begin{aligned} e_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1) \qquad &\Rightarrow \qquad S_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1) \\ &\Rightarrow \qquad S_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1). \end{aligned}$$

Conclusion, il existe $\gamma \in [0;1]$ tel que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$