Devoir Maison 7

A faire pour le jeudi 31/01

Exercice I (S'entrainer)

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

On note $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition.

Partie A : Etude aux bornes

IA.1 Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

IA.2 Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

IA.3 (a) Déterminer proprement un équivalent simple de f en $+\infty$.

(b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

IA.4 (a) Déterminer un équivalent simple de f en 0.

(b) Démontrer que f ne possède pas de développement limité d'ordre 1 en 0.

(c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

(d) Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. Retrouver le résultat de la question précédente. Quelle conclusion graphique peut-on déduire de cette limite ?

Partie B : Dérivée de f et g

IB.1 Déterminer $\mathscr{D}'_f$ le domaine de dérivabilité de f.

IB.2 Démontrer que pour tout $x \in \mathscr{D}'_f$,

$$f'(x) = \frac{1-x}{|1-x|\sqrt{x}\,(1+x)}.$$

On pose également

$$g : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{x}\right).$$

IB.3 Justifier que g est dérivable sur $\mathscr{D}'_f$.

IB.4 Calculer la dérivée de g.

Partie C : Simplification de f

IC.1 En déduire des questions précédentes une expression de $f(x)$ en fonction de $\arctan\left(\sqrt{x}\right)$ pour $x \in]0;1[$ puis pour $x \in]1;+\infty[$. *On ne précisera pas les constantes qui apparaissent.*

IC.2 Justifier que f est continue sur son domaine de définition et en déduire proprement les valeurs des constantes obtenues dans la question précédente.

Exercice II (S'entrainer)

Le but de ce problème est de donner plusieurs méthodes pour déterminer le développement limité de la fonction tangente en 0.

Partie A : Préliminaires

IIA.1 Justifier l'existence d'un développement à l'ordre 5 en 0 de la fonction tangente.

IIA.2 Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de la fonction tangente i.e.

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

(a) Justifier que certains coefficients sont nuls.

(b) En utilisant la dérivée de la fonction tangente, déterminer a_1.

Partie B : Méthode 1 : comme réciproque de l'arctangente

IIB.1 Soit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Déterminer un développement limité à l'ordre $2n$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en 0.
(b) Déterminer un développement limité à l'ordre $2n+1$ de la fonction arctan en 0.
(c) Préciser alors le développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre 5.

IIB.2 Déterminer le développement limité de la fonction $\tan(\arctan(x))$ quand $x \to 0$ en fonction de a_3 et a_5.

IIB.3 Sur quel ensemble a-t-on $\tan(\arctan(x)) = x$?

IIB.4 En déduire les valeurs de a_3 et a_5 et exprimer le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Partie C : Méthode 2 : comme quotient du sinus sur cosinus

IIC.1 Exprimer le développement limité en 0 de $x \mapsto \sin(x)$ et de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 5.

IIC.2 En déduire à nouveau le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Partie D : Méthode 3 : à l'aide de sa dérivée

IID.1 A l'aide de la question IIA.2b, déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ en 0.

IID.2 En déduire un développement limité d'ordre 3 de tangente en 0.

IID.3 En réappliquant la même méthode, déterminer à nouveau le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Exercice III (S'entrainer)

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & & 3v_n & -2w_n \\ v_{n+1} & = & -u_n & +3v_n & -w_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n & -3v_n & +4w_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le vecteur colonne dont les trois coordonnées sont respectivement u_n, v_n et w_n.

III.1 Montrer qu'il existe $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

III.2 En déduire proprement une formule de X_n en fonction de n, M et X_0.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

III.3 Déterminer le rang de A. La matrice A est-elle inversible ?

III.4 Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k.

III.5 Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

III.6 Expliciter $B = M - A$ puis calculer $D = P^{-1}BP$.

III.7 En déduire D^k puis B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

III.8 Justifier que l'on peut appliquer la formule du binôme de Newton à M et A.

III.9 En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.10 Conclure pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

III.11 Vérifier cette formule pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice IV (Rechercher (facultatif))

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On définit Φ par

$$\Phi : \quad \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F), \quad A \mapsto f(A).$$

Démontrer que f est injective si et seulement si Φ est injective.