Devoir Maison 8

A faire pour le jeudi 21/02

Exercice I (Restituer)

La fonction suivante f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui donner localement la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$f : x \mapsto \left(x^2 - 1\right) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Exercice II (S'entrainer)

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n - x - 1.$$

II.1 (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, la fonction f_n admet une unique valeur d'annulation sur $[1; +\infty[$ que l'on notera u_n.

(b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est bornée.

II.2 (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $f_{n+1}(u_n)$ est strictement positif.

(b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

II.3 (a) Déduire des questions précédentes que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge. On note ℓ sa limite.

(b) Donner un encadrement à l'unité de ℓ.

(c) A l'aide de la formule de Newton montrer que pour tout $n \geqslant 3$,

$$f\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

(d) En déduire la valeur de ℓ.

II.4 On pose pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_n = u_n - \ell$.

(a) Justifier que pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_n \neq 0$.

(b) Déterminer un équivalent simple de $\ln(1 + u_n)$.

(c) Même question pour $n \ln(u_n)$. En quoi la question II.4a est-elle nécessaire pour justifier votre réponse ?

(d) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $n \ln(u_n) = \ln(1 + u_n)$.

(e) En déduire un équivalent simple de α_n puis un développement asymptotique à l'ordre $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de u_n.

II.5 On suppose que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Déterminer alors les coefficients a, b et c.

Exercice III (S'entrainer)

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1 - x - 2x^2 \ln(x)}{4},$$

puis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Partie A : Etude de f

IIIA.1 Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera toujours f la fonction prolongée. Préciser alors $f(0)$.

IIIA.2 Démontrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

IIIA.3 La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

IIIA.4 Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[0; 1]$.

IIIA.5 Déduire proprement de la question précédente que pour tout $x \in [0; 1]$

$$f(x) \in [0; 1] \qquad \text{et} \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}.$$

IIIA.6 Montrer que f admet un unique point fixe dans $[0; 1]$. On notera ℓ ce point fixe.

Partie B : Limite de la suite

IIIB.1 Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.

IIIB.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{3}{4} |u_n - \ell|.$$

IIIB.3 Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

IIIB.4 Ecrire un programme Python prenant une precision r en paramètre et retournant une valeur de ℓ à la précision r. L'appliquer pour obtenir une valeur de ℓ à la précision 10^{-5}.

Partie C : Un peu d'adjacence

On n'utilisera pas dans cette partie les résultats de la Partie B.
On pose la fonction $g : [0; 1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0; 1[$ par $g(x) = f \circ f(x)$. On pose également les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{2n} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{2n+1}.$$

IIIC.1 Justifier que g est bien définie.

IIIC.2 Sans calcul, quelle est la monotonie de g ? Le démontrer rigoureusement.

IIIC.3 Que peut-on en déduire pour les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

IIIC.4 Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

IIIC.5 En utilisant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(v_n)$, montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

IIIC.6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_{n+1} - w_{n+1}| \leqslant \frac{3}{4} |w_n - v_n|.$$

IIIC.7 En déduire que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

IIIC.8 Retrouver alors le résultat de la question IIIB.3.

Exercice IV (Rechercher (facultatif))

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.