Correction du DS10

Exercice 1 - Géométrie de l'espace

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On munit l'espace $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$. On donnera dans la suite les coordonnées dans ce repère.

On considère la droite $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x - z - 4 = 0 \\ x + y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$ ainsi que le point $\Omega_\lambda\,(0, 1, \lambda)$.

1. On a les équivalences suivantes entre équations :

$$\begin{cases} x - z - 4 = 0 \\ x + y - 3z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 4 \\ z + 4 + y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 3 \\ z = z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{A\,(4, 3, 0) \text{ est un point de } \mathcal{D} \text{ et } \vec{u}\,(1, 2, 1) \text{ (qui est bien non nul) est un vecteur directeur de } \mathcal{D}}$ et $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}\,(\vec{u})$.

2. Par le cours, on a

$$d\,(\Omega_\lambda, \mathcal{D}) = \frac{\left\| \overrightarrow{A\,\Omega_\lambda} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ \lambda \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -2 - 2\,\lambda \\ \lambda + 4 \\ -8 + 2 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{6}}$$
$$= \frac{\sqrt{4 + 8\,\lambda + 4\,\lambda^2 + \lambda^2 + 8\,\lambda + 16 + 36}}{\sqrt{6}}$$
$$= \sqrt{\frac{5\,\lambda^2 + 16\,\lambda + 56}{6}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{d\,(\Omega_\lambda, \mathcal{D}) = \sqrt{\frac{5\,\lambda^2 + 16\,\lambda + 56}{6}}.}$$

On note $\mathcal{E}_1$ l'ensemble d'équation $z = 0$ et $\mathcal{E}_2$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0$.

3. L'ensemble $\boxed{\mathcal{E}_1 \text{ est plan horizontal passant par l'origine } O\,(0, 0, 0) \text{ et dont un vecteur normal est } \overrightarrow{n_1}\,(0, 0, 1).}$
Pour $\mathcal{E}_2$, on a les équivalences suivantes entre équations,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2.$$

Donc $\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est la sphère de centre } B\,(0, 1, 0) \text{ et de rayon } \sqrt{2}}$.

4. On note $\mathcal{C} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Par définition, $\mathcal{C}$ est un cercle de $\mathcal{E}_1$. Soit $M\,(x, y, z) \in \mathscr{E}$. On a

$$M \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 2. \end{cases}$$

Donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle inclus dans } \mathcal{E}_1, \text{ de centre } I\,(0, 1, 0) \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$

5. Soit $M\,(x, y, z) \in \mathcal{C}$. On sait que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}_1$, donc $z = 0$. Donc $M\,(x, y, 0)$. Par suite,

$$\left\langle \overrightarrow{I\,\Omega_\lambda}, \overrightarrow{IM} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

Donc $\overrightarrow{I\,\Omega_\lambda}$ est orthogonal à tous les vecteurs $\overrightarrow{IM}$, pour $M \in \mathcal{C}$ donc $(I\,\Omega_\lambda)$ est bien la droite passant par I et perpendiculaire à tous les vecteurs $\overrightarrow{IM}$, pour $M \in \mathcal{C}$. Donc $(I\,\Omega_\lambda)$ est l'axe de $\mathcal{C}$. Donc $\boxed{\Omega_\lambda \text{ est un point de l'axe de } \mathcal{C}}$.

6. Soit $\mathcal{S}_\lambda$ la sphère de centre Ω_λ contenant le cercle $\mathcal{C}$. D'après la question 4.,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 2. \end{cases}$$

Donc le point $M\,(1, 0, 0)$ est un point de $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}_\lambda$. Donc

$$R_\lambda = \left\| \overrightarrow{\Omega_\lambda\,M} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\lambda \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 1 + \lambda^2} = \sqrt{2 + \lambda^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{R_\lambda = \sqrt{2 + \lambda^2}.}$$

7. La droite $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{S}_\lambda$ si et seulement si $d\,(\Omega_\lambda, \mathcal{D}) = R_\lambda$. Donc d'après les question précédente,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \text{ est tangente à } \mathcal{S}_\lambda \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{5\,\lambda^2 + 16\,\lambda + 56}{6}} = \sqrt{2 + \lambda^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{5\,\lambda^2 + 16\,\lambda + 56}{6} = 2 + \lambda^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 16\,\lambda - 44 = 0. \end{aligned}$$

Posons Δ le discriminant de $\lambda^2 - 16\,\lambda - 44$.

$$\Delta = 16^2 + 4 \times 44 = 16\,(16 + 11) = 16 \times 27 = 4^2 \times 3^2 \times 3 > 0.$$

Donc $\lambda^2 - 16\,\lambda - 44 = 0$ possèdent deux solutions $\lambda_1 = \frac{16 - 12\sqrt{3}}{2} = 8 - 6\sqrt{3}$ et $\lambda_2 = 8 + 4\sqrt{3}$. Nous avons donc bien montré qu' $\boxed{\text{il existe exactement 2 valeurs de } \lambda \text{ pour lesquelles } \mathcal{S}_\lambda \text{ est tangente à } \mathcal{D}}$ données par

$$\lambda_1 = 8 - 6\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 8 + 4\sqrt{3}.$$

Exercice 2 - Variables aléatoires

Partie I - préliminaire

1. (a) Comme la variable aléatoire X_1 compte le nombre de succès (i.e. de personnes répondant à l'appel) après N répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli (N appels), il vient que :
   $\boxed{\text{Conclusion : } X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(N,p).}$

   (b) $\boxed{\text{Conclusion : } X_1(\Omega) = [\![0,N]\!],\ \mathbb{E}(X_1) = Np \text{ et } \mathbb{V}(X_1) = Np(1-p).}$

2. (a) Sachant que $X_1 = i$ (i.e. i personnes ont répondu le premier jour) et que le secrétaire ne rappelle au deuxième jour que les personnes n'ayant pas répondu le premier jour, il sera amené à rappeler $N-i$ personnes le deuxième jour.
   Comme X_2 désigne le nombre de personnes ayant répondu au deuxième jour, il vient que :
   $\boxed{\text{Conclusion : l'univers image de } X_2 \text{ sachant } X_1 = i \text{ est } [\![0,N-i]\!].}$

   (b) Sachant que $X_1 = i$, la variable aléatoire X_2 compte le nombre de succès (personnes répondant à l'appel) après $N-i$ répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli (N appels), il vient que la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = i$ est la loi binomiale de paramètres $N-i$ et p, à savoir $\mathscr{B}(N-i,p)$.
   On en déduit alors que pour tout $j \in [\![0,N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j} p^j (1-p)^{N-i-j} & \text{si } j \in [\![0,N-i]\!] \\ 0. & \text{sinon} \end{cases}$$

   (c) La loi conjointe $\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}$ de X_1 et X_2 est déterminée par la donnée de :
   - $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) = [\![0,N]\!]^2$;
   - Pour tout $(i,j) \in [\![0,N]\!]^2$, $P(X_1 = i) > 0$ ce qui permet d'écrire les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) &= \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) \\ &= \begin{cases} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \binom{N-i}{j} p^j (1-p)^{N-i-j} & \text{si } j \in [\![0,N-i]\!] \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \binom{N}{i}\binom{N-i}{j} p^{i+j} (1-p)^{2N-2i-j} & \text{si } j \in [\![0,N-i]\!] \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Partie II - cas $N = 2$

3. Sachant que $j = 1 \in [\![0,N-i]\!] = [\![0,2-1]\!]$, on obtient avec la formule précédemment établie que :

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^{1+1}} \frac{1}{2^{2\times 2 - 2\times 1 - 1}} = 2 \times 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

$\boxed{\text{Conclusion : le tableau semble cohérent avec le résultat précédemment trouvé.}}$

4. La loi $\mathbb{P}_{X_2}$ de X_2 est entièrement déterminée par la donnée de :
   — $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$.
   — A l'aide de la formule des probabilités totales, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{array}{lllllll}
\diamond\ \mathbb{P}(X_2=0) & \underset{\substack{(\{X_1=k\})_{k\in[\![1,3]\!]}\\ \text{SCE}}}{=} & \mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=0)) & + & \mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=1)) & + & \mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=2))\\
& = & \dfrac{1}{16} & + & \dfrac{4}{16} & + & \dfrac{4}{16}\\
& = & \dfrac{9}{16} & & & & \\
\diamond\ \mathbb{P}(X_2=1) & \underset{\substack{(\{X_1=k\})_{k\in[\![1,3]\!]}\\ \text{SCE}}}{=} & \mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=0)) & + & \mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=1)) & + & \mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=2))\\
& = & \dfrac{2}{16} & + & \dfrac{4}{16} & + & 0\\
& = & \dfrac{6}{16} & & & & \\
\diamond\ \mathbb{P}(X_2=2) & \underset{\substack{(\{X_1=k\})_{k\in[\![1,3]\!]}\\ \text{SCE}}}{=} & \mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=0)) & + & \mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=1)) & + & \mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=2))\\
& = & \dfrac{1}{16} & + & 0 & + & 0\\
& = & \dfrac{6}{16} & & & &
\end{array}$$

Conclusion : les lois marginales $\mathbb{P}_{X_1}$ et $\mathbb{P}_{X_2}$ sont déterminées par le tableau suivant :

X_2 \ X_1	0	1	2	Loi de X_2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{9}{16}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{1}{16}$
Loi de X_2	$\frac{4}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{16}$	✓

5. On remarque que :

$$\mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=0)) = \frac{1}{16} \neq \frac{4}{16}\times\frac{9}{16} = \mathbb{P}(X_2=0)\times\mathbb{P}(X_1=0)$$

Conclusion : X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

6. – *(Calcul de l'espérance de X_2)*
   On a les égalités entre réels suivantes :

$$\mathbb{E}(X_2) = \sum_{x_k\in X_2(\Omega)} x_k P(X_2=x_k) = 0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{6}{16}+2\times\frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

   – *(Calcul de la variance de X_2)*
   On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_2) &\underset{\text{KH}}{=} \mathbb{E}(X_2^2)-\mathbb{E}(X_2)^2 \underset{\substack{\text{théorème}\\ \text{de transfert}}}{=} \sum_{x_k\in X_2(\Omega)} x_k^2\mathbb{P}(X_2=x_k)-\mathbb{E}(X)^2\\
&= 0^2\times\frac{9}{16}+1^2\times\frac{6}{16}+2^2\times\frac{1}{16}-\frac{1}{2^2}\\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } E(X_2) = \frac{1}{2} \text{ et } V(X_2) = \frac{3}{8}.}$$

Partie III - loi de Z_n

7. Par définition de Z_n, il vient que :

$$\boxed{\text{Conclusion : } Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$

8. (a) La loi conditionnelle de X_k sachant $(X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = 0)$ est la loi binomiale de paramètres N et p. On en déduit alors que :

$$\mathbb{P}(X_k = 0 \mid (X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = 0)) = \binom{N}{0} p^0 (1-p)^{N-0} = (1-p)^N$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathbb{P}(X_k = 0 \mid (X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = 0)) = (1-p)^N.}$$

(b) Sachant que $\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 0)) \neq 0$, la formule des probabilités composées permet d'écrire les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = 0) &= \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0)) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 0)}_{=(1-p)^N \text{car } X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(N,p)} \underbrace{\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)}_{=(1-p)^N \text{ par } q8(a)} \times \cdots \times \underbrace{\mathbb{P}(X_n = 0 \mid (X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 0))}_{=(1-p)^N \text{ par } q8(a)} \\ &= (1-p)^{nN} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-p)^{nN}.}$$

(c) Sachant que $p \in]0,1[$, il vient que $(1-p)^N \in]0,1[$. Ainsi, par convergence d'une suite géométrique de raison de module strictement inférieur à 1, il vient que :

$$\boxed{\text{Conclusion : } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 0.}$$

9. Soit $(i,j) \in [\![0, N]\!]^2$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 = j \mid X_1 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = j - i \mid X_1 = i) \\ &\underset{q2.(b)}{=} \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{N-j} & \text{si } 0 \leqslant j - i \leqslant N - i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathbb{P}(Z_2 = j \ Z_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

10. Sachant que la famille $(\{Z_1 = i\})_{i \in [\![0,N]\!]}$ forme un système complet d'évènements incompatibles, la formule des probabilités totales permet d'écrire les égalités entre réels suivantes pour tout $j \in [\![0, N]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 = j) &= \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(Z_1 = i) \mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{N-j} \\ &= p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i} (1-p)^{j-i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall j \in [\![0, N]\!],\ \mathbb{P}(Z_2 = j) = p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i} (1-p)^{j-i}.}$$

11. On a les égalités entre entiers naturels suivantes :

$$\frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}} = \frac{\frac{(N-i)!}{(j-i)!(N-j)!} \times \frac{N!}{i!(N-i)!}}{\frac{j!}{i!(j-i)!}} = \frac{N!}{j!(N-j)!} = \binom{N}{j}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}} = \binom{N}{j}.}$

12. On a les égalités entre réels suivantes pour tout $j \in [\![0, N]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = j) &= p^j(1-p)^{2N-2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}(1-p)^{j-i} \\
&= \binom{N}{j}p^j(1-p)^{2N-2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(1-p)^{j-i}\times 1^i \\
&\underset{\substack{\text{binôme}\\ \text{de Newton}}}{=} \binom{N}{j}p^j(1-p)^{2N-2j}((1-p)+1)^j \\
&= \binom{N}{j}(p(2-p))^j((1-p)^2)^{N-j} \\
&= \binom{N}{j}(p(2-p))^j(1-p(2-p))^{N-j} \\
&= \binom{N}{j}p_2^j(1-p_2)^{N-j}
\end{aligned}$$

Ainsi, $Z_2(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et $\mathbb{P}(Z_2 = j) = \binom{N}{j}p_2^j(1-p_2)^{N-j}$, autrement dit :

$\boxed{\text{Conclusion : } Z_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_2).}$

13. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Pour déterminer son expression explicite, on procède de la manière suivante :
   - *Recherche du point fixe :*
     Résolvons l'équation $x = (1-p)x + p$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

     $$x = (1-p)x + p \Longleftrightarrow (1-(1-p))x = p \underset{p\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = 1$$

   - *Suite pivot géométrique :*
     Montrons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (p_n - 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison x.
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

     $$q_{n+1} = p_{n+1} - 1 = (1-p)p_n + p - 1 = (1-p)(p_n - 1) = (1-p)q_n$$

     Ainsi, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $1-p$ et sa forme explicite est donnée par :

     $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = (1-p)^{n-1}q_1 \underset{q_1 = p-1}{=} -(1-p)^n$$

   Enfin, sachant que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (q_n + 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il vient que :

   $\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 1-(1-p)^n.}$

14. Sachant que $Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_n)$, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \binom{N}{0}p_n^0(1-p_n)^{N-0} = 1\times 1\times(1-(1-(1-p)^n))^N = (1-p)^{nN}$$

$\boxed{\text{Conclusion : on retrouve bien le résultat de la question 8(c), à savoir } \mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-p)^{nN}.}$