Corrigé du Devoir Surveillé 2

Question de cours

1. Voir le cours.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{-3}{k(k+1)} = -3 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)},$$

et on reconnaît l'exemple 8 du cours. On observe que pour tout $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Donc A_n est une somme télescopique :

$$A_n = -3 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -3\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = -3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \frac{-3n}{n+1}.}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans la somme B_p, on ne peut reconnaître directement un binôme de Newton car le coefficient binomial est donné en fonction de $p+1$ et la somme s'arrête à p. Qu'à cela ne tienne ! Il suffit d'ajouter et d'enlever le dernier terme pour faire apparaître un binôme de Newton. Il nous manque également le premier terme que l'on complète :

$$\begin{aligned} B_p = \sum_{t=1}^{p} \binom{p+1}{t} &= \sum_{t=0}^{p+1} \binom{p+1}{t} - \binom{p+1}{0} - \binom{p+1}{p+1} \\ &= \sum_{t=0}^{p+1} \binom{p+1}{t} 1^t 1^{p+1-t} - 1 - 1 = (1+1)^{p+1} - 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad B_p = 2^{p+1} - 2.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On modifie le coefficient à l'intérieur de la somme pour faire apparaître un terme de la forme $\binom{n+2}{i} a^i$:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+2}{i} \left(-2^{-i}\right)^4 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+2}{i} (-1)^4 \left(2^{-4i}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+2}{i} \left(2^{-4}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+2}{i} \left(\frac{1}{16}\right)^i.$$

De même que précédemment, quitte à rajouter les deux derniers termes, on reconnaît la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n+2} \binom{n+2}{i} \left(\frac{1}{16}\right)^i - \binom{n+2}{n+1} \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} - \binom{n+2}{n+2} \left(\frac{1}{16}\right)^{n+2} \\ &= \left(\frac{1}{16} + 1\right)^{n+2} - (n+2) \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{n+2} \\ &= \frac{17^{n+2} - (n+2)\,16 - 1}{16^{(n+2)}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \frac{17^{n+2} - n16 - 33}{16^{(n+2)}}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le cours sur les sommes triangulaires on a :

$$D_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{j=i}^{n} 1 \right).$$

Or pour tout $i \leqslant n-1$, $\sum_{j=i}^{n} 1 = n - i + 1$, donc

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} i\,(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n} i\,(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En factorisant par $n(n+1)$ et en réduisant au même dénominateur,

$$D_n = \frac{n(n+1)\,(3n+3-2n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Il était aussi possible de sommer d'abord en i puis ensuite en j :

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2+j}{2} = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}.$$

En factorisant, on obtient

$$D_n = n(n+1)\frac{2n+1+3}{12} = n(n+1)\frac{2n+4}{12}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\boxed{z^6 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \{0, \dots, 5\}, \quad z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{6}} = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}}$$

et

$$\begin{aligned} z^3 = -1-i \quad &\Leftrightarrow \quad z^3 = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \{0,1,2\}, \quad z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12} + i\frac{2k\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{z^3 = -1-i \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \{0,1,2\}, \quad z = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{(5+8k)\pi}{12}}.}$$

Problème 1 — Autour des noyaux de Dirichlet et de Féjer

Partie I - Étude du $n^{\text{ième}}$ noyau de Dirichlet

1. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2\pi p$. Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(kx) = \cos(2\pi kp) = 1$. Donc pour tout $n \geqslant 1$, $D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 2n$. On note que cette formule est encore vraie pour $n = 0$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n(x) = 1 + 2n.}$$

2. On suppose que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \geqslant 1$.
   (a) On commence par en avoir l'habitude,

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 1 - \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}.}$$

(b) La somme $E_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique de raison e^{ix}. Or on suppose $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Donc $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$. Par conséquent,

$$E_n(x) = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{ix}} = \frac{1-\mathrm{e}^{ix(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{ix}}.$$

En utilisant la question précédente au numérateur avec $\theta = x(n+1)$ et au dénominateur avec $\theta = x$, on obtient

$$E_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{x(n+1)}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}} \frac{-2i\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Donc

$$\boxed{E_n(x) = \mathrm{e}^{i\frac{xn}{2}} \frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.} \qquad (\bigstar)$$

(c) On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ikx}\right)$. Donc

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ikx}\right).$$

Par les propriétés élémentaires de la partie réelle,

$$D_n(x) = \mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} - 2\right).$$

On reconnaît au milieu le terme $E_n(x)$ et donc

$$\boxed{D_n(x) = \mathrm{Re}\left(2E_n(x) - 1\right).} \qquad (\bigstar\bigstar)$$

(d) A l'aide des deux questions précédentes, on en déduit que

$$D_n(x) = \mathrm{Re}\left(2\,\mathrm{e}^{i\frac{xn}{2}} \frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right) = \frac{2\cos\left(\frac{xn}{2}\right)\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1.$$

En appliquant la formule $2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) + \sin(b-a)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2} + \frac{xn}{2}\right) + \sin\left(\frac{x(n+1)}{2} - \frac{xn}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D_n = \frac{\sin\left(x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.} \qquad (\bigstar\bigstar\bigstar)$$

(e) Lorsque $n = 0$, par définition de D_0, on a $D_0 = 1$. D'autre part le terme de droite de l'égalité ci-dessus donne $\frac{\sin\left(x\left(0+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 1$. $\boxed{\text{Par conséquent, la formule } (\bigstar\bigstar\bigstar) \text{ est encore vraie pour } n = 0.}$

3. Supposons que $\frac{3\pi}{n+1} \in 2\pi\mathbb{Z}$ et observons que

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{n+1} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad &\Rightarrow \quad \exists p \in \mathbb{Z},\ \frac{3\pi}{n+1} = 2\pi p \\ &\Rightarrow \quad \exists p \in \mathbb{Z},\ 3\pi = 2\pi p(n+1) \\ &\Rightarrow \quad \exists p \in \mathbb{Z},\ 3 = 2p(n+1) \\ &\Rightarrow \quad 3 \text{ est pair.} \end{aligned}$$

La dernière assertion étant fausse on en déduit que la supposition est fausse (raisonnement par l'absurde). Donc $\frac{3\pi}{n+1} \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Premier cas $n=0$, alors par définition de E_0, on a $E_0\left(\frac{3\pi}{n+1}\right)=\sum_{k=0}^{0}\mathrm{e}^{ik\left(\frac{3\pi}{n+1}\right)}=1$.
Second cas $n\geqslant 1$. On rappelle que $\frac{3\pi}{n+1}\notin 2\pi\mathbb{Z}$. Donc d'après (★), on a

$$E_n\left(\frac{3\pi}{n+1}\right)=\mathrm{e}^{i\frac{3n\pi}{2(n+1)}}\frac{\sin\left(\frac{3\pi(n+1)}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)}=\frac{-1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{3n\pi}{2(n+1)}}$$

Puisque $n+1\geqslant 2$, on a $0<\frac{3\pi}{2(n+1)}\leqslant\frac{3\pi}{4}<\pi$. Donc $\sin\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)>0$. Donc la forme trigonométrique de $E_n\left(\dfrac{3\pi}{n+1}\right)$ est donnée par

$$E_n\left(\frac{3\pi}{n+1}\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{3n\pi}{2(n+1)}-\pi}=\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{(3n-2n-2)\pi}{2(n+1)}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{(n-2)\pi}{2(n+1)}}.$$

On remarque d'après le calcul précédent de $E_0\left(\frac{3\pi}{n+1}\right)$ que la formule ci-dessus est encore vraie pour $n=0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad E_n\left(\frac{3\pi}{n+1}\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{(n-2)\pi}{2(n+1)}}.}$$

Partie II - Étude du noyau de Féjer d'ordre n

On rappelle la formule (★★★) établie en partie I :

$$\forall x\notin 2\pi\mathbb{Z},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad D_n(x)=\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

4. Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors d'après la question 1, on a $D_n(x)=1+2n$. Donc

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)=\frac{1}{n}\left(n+2\frac{(n-1)n}{2}\right)=1+n-1.$$

Donc,

$$\boxed{F_n(x)=n.}$$

5. On suppose à nouveau que $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$.
   (a) En utilisant la formule $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on observe que pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$,

$$\frac{\cos(kx)-\cos((k+1)x)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{-2\sin\left(\frac{kx+(k+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{kx-(k+1)x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

   La fonction sinus étant impaire, pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$,

$$\frac{\cos(kx)-\cos((k+1)x)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

   Puisque $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$, on peut simplifier par $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et à l'aide de (★★★), on en déduit que pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$,

$$\boxed{D_k(x)=\frac{\cos(kx)-\cos((k+1)x)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

   (b) La formule de la question précédente permet de faire apparaître une somme télescopique. Donc,

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(x)=\frac{1}{2n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\cos(kx)-\cos((k+1)x)\right]=\frac{1}{2n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\left[\cos(0)-\cos(nx)\right].$$

   Ainsi,

$$F_n(x)=\frac{1-\cos(nx)}{2n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En développant le cosinus, on obtient que

$$F_n(x) = \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)\right)}{2n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{2n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Finalement,

$$\boxed{F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2.}$$

Partie III - Calcul de $\tan(\pi/8)$

6. Puisque $\frac{\pi}{2n} \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{4n} \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $x = \frac{\pi}{2n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Donc d'après (★),

$$E_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi n}{4n}} \frac{\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}.$$

Donc en prenant la partie réelle,

$$\mathrm{Re}\left(E_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}.$$

En développant le sinus, on obtient que

$$\mathrm{Re}\left(E_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}.$$

Or $0 \leqslant \frac{\pi}{4n} \leqslant \frac{\pi}{4}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) \neq 0$. D'où, en divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)$,

$$\mathrm{Re}\left(E_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{1+\tan\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4n}\right)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(E_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\right).}$$

7. Fixons $n = 2$. D'une part, la question précédente implique que

$$\mathrm{Re}\left(E_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right).$$

D'autre part, par définition de E_2, on a

$$\mathrm{Re}\left(E_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i0} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{4}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 1+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 2+\sqrt{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 1+\sqrt{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1.}$$

Exercice 1 — Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

On pose $a = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}$ et $b = -a$.

1. A partir de la définition des racines 10-ièmes il suffit de remarquer que
$$a^{10} = \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}\right)^{10} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}10} = \mathrm{e}^{i2\pi} = 1.$$
Donc $\boxed{a \in \mathbb{U}_{10}.}$ De plus, on remarque que $b^5 = (-a)^5 = -a^5$. Or $a = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}$, donc
$$b = -\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = -\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{5}} = -\,\mathrm{e}^{i\pi} = 1.$$
Donc b est une racine 5-ième de l'unité c'est-à-dire en posant $m = 5 < 10$, on a
$$\boxed{b \in \mathbb{U}_m.}$$

2. Le complexe b est une racine 5-ième de l'unité. De plus $b \neq 1$. En effet si $b = 1$, alors $a = -b = -1$. Donc $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}} = 1$ ce qui est faux car $\frac{\pi}{5} \in]0; 2\pi[$. Donc $b \neq 1$ et b est une racine 5-ième de l'unité. Donc
$$\sum_{k=0}^{4} b^k = 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 = 0.$$
Ainsi en rappelant que $b = -a$,
$$1 - a + (-a)^2 + (-a)^3 + (-a)^4 = 0.$$
Donc
$$\boxed{1 - a + a^2 - a^3 + a^4 = 0.}$$

3. (a) On sait que $a \in \mathbb{U}$, donc
$$\boxed{\overline{a} = \frac{1}{a}.}$$
   (b) D'après la question 1, $b^5 = (-a)^5 = 1$ donc $a^5 = -1$ (ce que l'on peut retrouver aussi directement par le calcul à partir de $a = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}$). Ainsi,
$$a \times a^4 = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^4 = \frac{-1}{a} \qquad \text{car } a \neq 0.$$
   Conclusion
$$\boxed{\overline{a} = \frac{1}{a} = -a^4.}$$
   (c) D'après la question précédente, on peut écrire que
$$1 - (a + \overline{a}) + (a^2 + \overline{a}^2) = 1 - \left(a - a^4\right) + \left(a^2 + \left(-a^4\right)^2\right) = 1 - a + a^4 + a^2 + (-1)^2 a^8.$$
   Or on a vu que $a^5 = -1$. Donc $a^8 = a^5 a^3 = -a^3$. Conclusion,
$$\boxed{1 - (a + \overline{a}) + (a^2 + \overline{a}^2) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4.}$$

4. On sait que pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. Donc
$$1 - (a + \overline{a}) + (a^2 + \overline{a}^2) = 1 - 2\mathrm{Re}(a) + 2\mathrm{Re}\left(a^2\right) = 1 - 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}\right) + 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}\right) = 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$
Donc d'après la question précédente,
$$1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4.$$
Donc d'après la question 2,
$$\boxed{1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0.}$$

5. Par les formules trigonométriques,
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right).$$
Or $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Ainsi,
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 2X^2 - 1.}$$

6. D'après les deux questions précédentes, on en déduit directement que X vérifie l'équation suivante :
$$1 - 2X + 2\left(2X^2 - 1\right) = \boxed{4X^2 - 2X - 1 = 0.}$$

7. Le discriminant de l'équation précédente vaut $\Delta = 4 + 16 = 20$. Donc les solutions de l'équation précédentes sont
$$\boxed{X_1 = \frac{2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{ou} \qquad X_2 = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$
Des questions précédentes, on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est une solution de l'équation $4X^2 - 2X - 1 = 0$ et que donc $\cos(\frac{\pi}{5}) = X_1$ ou que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = X_2$. Or on observe d'une part que $X_1 < 0 < X_2$ et d'autre part que $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et que donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$. Ainsi,
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$
Puis à l'aide de la question 5,
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2X_2^2 - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = 2\frac{1+2\sqrt{5}+5}{16} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}-8}{8}.$$
Finalement,
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.}$$

Problème 2 — Autour d'une fonction complexe

Partie I - Logique et raisonnements

1. On a les égalités ensemblistes suivantes :
$$\mathscr{D}_f = \{z \in \mathbb{C},\ f(z) \text{ existe}\} = \{z \in \mathbb{C},\ 2z - 1 \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$
Ainsi, $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}}$.

2. Soit $z \in \mathscr{D}_f$. Supposons que z est de module 1 i.e. $\overline{z} = 1/z$.
Montrons que $\dfrac{f(z)-2}{z-2}$ est réel i.e. $\overline{\left(\dfrac{f(z)-2}{z-2}\right)} = \dfrac{f(z)-2}{z-2}$.
Commençons par simplifier l'expression de $\dfrac{f(z)-2}{z-2}$:
$$\frac{f(z)-2}{z-2} = \frac{\frac{z-2}{2z-1} - 2}{z-2} = \frac{\frac{z-2-2(2z-1)}{2z-1}}{z-2} = \frac{-3z}{(2z-1)(z-2)}.$$

On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{f(z)-2}{z-2}\right)} &= \overline{\left(\frac{-3z}{(2z-1)(z-2)}\right)} = \frac{-3\overline{z}}{(2\overline{z}-1)(\overline{z}-2)} \\
&\underset{\overline{z}=1/z}{=} \frac{\frac{-3}{z}}{(\frac{2}{z}-1)(\frac{1}{z}-2)} = \frac{\frac{-3}{z}}{\frac{(2-z)(1-2z)}{z^2}} = \frac{-3z}{(z-2)(2z-1)} = \frac{f(z)-2}{z-2}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathscr{D}_f$, on a bien montré que

$$\boxed{z \text{ est de module } 1 \rightarrow \frac{f(z)-2}{z-2} \text{ est réel.}}$$

3. Soit $z \in \mathscr{D}_f$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
|f(z)| = 1 &\iff |f(z)|^2 = 1 \quad \text{car les termes sont positifs} \\
&\iff f(z)\overline{f(z)} = 1 \\
&\iff \frac{z-2}{2z-1} \times \frac{\overline{z}-2}{2\overline{z}-1} = 1 \\
&\iff (z-2)(\overline{z}-2) = (2z-1)(2\overline{z}-1) \\
&\iff z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4 = 4z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 1 \\
&\iff 3 = 3|z|^2 \\
&\iff |z| = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathscr{D}_f$, on a bien montré que

$$\boxed{|f(z)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1.}$$

4. (a) Soit $z \in \mathscr{D}_f$. Montrons que $f(f(z)) = z$.
On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f(f(z)) = \frac{f(z)-2}{2f(z)-1} = \frac{\frac{z-2}{2z-1} - 2}{2 \times \frac{z-2}{2z-1} - 1} = \frac{\frac{z-2-2(2z-1)}{2z-1}}{\frac{2(z-2)-(2z-1)}{2z-1}} = \frac{-3z}{-3} = z.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathscr{D}_f,\ f(f(z)) = z.}$

(b) Soit $z \in \mathscr{D}_f$. Montrons par récurrence :

$$\forall n \geqslant 1,\ \underbrace{\Big[\ \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n \text{ fois}}(z) = z \quad \text{ET} \quad \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n+1 \text{ fois}}(z) = f(z)\Big].}_{\mathscr{P}(n)}$$

– *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(1)$ est vraie i.e. :

$$\Big[\ \underbrace{(f \circ f)}_{2 \text{ fois}}(z) = z \quad \text{ET} \quad \underbrace{(f \circ f \circ f)}_{3 \text{ fois}}(z) = f(z)\Big].$$

D'après 4a), on a $f(f(z)) = z$ i.e. $(f \circ f)(z) = z$.
Par composition par z, on trouve $f((f \circ f)(z)) = f(z)$ i.e. $(f \circ f \circ f)(z) = f(z)$.
Ainsi $\mathscr{P}(1)$ est bien vraie.

– *Hérédité.* Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$ i.e. :

$$\Big[\ \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2(n+1) \text{ fois}}(z) = z \quad \text{ET} \quad \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2(n+1)+1 \text{ fois}}(z) = f(z)\Big].$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n \text{ fois}}(z) = z.$$

Ainsi, par composition par $f \circ f$, il vient alors :

$$\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n+2 \ fois}(z) = (f \circ f)(z) \underset{4a)}{=} z.$$

En composant cette dernière égalité entre complexes par f, on trouve :

$$\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n+3 \ fois}(z) = f(z)$$

Ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ainsi, on a bien montré que pour tout } n \geqslant 1,\\ \Big[\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n \ fois}(z) = z \quad \text{ET} \quad \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n+1 \ fois}(z) = f(z)\Big].\end{array}}$$

5. On considère la proposition P quantifiée suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, \ \exists! \omega \in \mathscr{D}_f, \ f(\omega) = z.$$

   (a) $\boxed{\text{Cette phrase signifie que tout complexe différent de } 1/2 \text{ admet un unique antécédent par la fonction } f.}$

   (b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/2\}$. Montrons que z admet un unique antécédent par la fonction f i.e. que l'équation $f(\omega) = z$ d'inconnue $\omega \in \mathscr{D}_f$ admet une unique solution.
   Soit $\omega \in \mathscr{D}_f$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(\omega) = z \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\omega - 2}{2\omega - 1} = z \Longleftrightarrow \omega - 2 = z(2\omega - 1) \\ &\Longleftrightarrow \quad (1 - 2z)\omega = 2 - z \underset{z \neq 1/2}{\Longleftrightarrow} \omega = f(z). \end{aligned}$$

   L'équation $f(\omega) = z$, d'inconnue $\omega \in \mathscr{D}_f$, admet bien une unique solution $\omega = f(z)$.
   $\boxed{\text{Ainsi, tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{1/2\} \text{ admet un unique antécédent par la fonction } f \text{ i.e. } P \text{ est une proposition vraie.}}$

Partie II - Résolution d'équations

6. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 2z^3 + (-1 + 8i)\, z^2 + (-7 - 2i)\, z - 3 - 3i$.

   (a) Montrons que $-1/2$ est solution de (E_1) i.e. $P(-1/2) = 0$.
   On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} P(-\tfrac{1}{2}) \quad &= \quad 2(-\tfrac{1}{2})^3 + (-1 + 8i)\,(-\tfrac{1}{2})^2 + (-7 - 2i)\,(-\tfrac{1}{2}) - 3 - 3i \\ &= \quad (-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{2} - 3) + i(2 + 1 - 3) = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{-1/2 \text{ est bien solution de l'équation } (E_1)}$.

   (b) **Méthode 1.** Soit a, b et c des complexes. On a l'équivalence suivante pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} & 2z^3 + (-1 + 8i)\, z^2 + (-7 - 2i)\, z - 3 - 3i = (2z + 1)(az^2 + bz + c) \\ \Longleftrightarrow \quad & 2z^3 + (-1 + 8i)\, z^2 + (-7 - 2i)\, z - 3 - 3i = 2az^3 + (a + 2b)z^2 + (b + 2c)z + c. \end{aligned}$$

   Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient le système d'équation suivants que l'on résout par équivalences :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a & = & 2 \\ a + 2b & = & -1 + 8i \\ b + 2c & = & -7 - 2i \\ c & = & -3 - 3i \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ 2b & = & -2 + 8i \\ b + 2c & \underset{?}{=} & -7 - 2i \\ c & = & -3 - 3i \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 + 4i \\ (-1 + 4i) + 2(-3 - 3i) & \underset{ok!}{=} & -7 - 2i \\ c & = & -3 - 3i \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$2z^3 + (-1+8i)\,z^2 + (-7-2i)\,z - 3 - 3i = (2z+1)(z^2 + (-1+4i)z + (-3-3i)).$$

Méthode 2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on souhaite factoriser $P(z) = 2z^3 + (-1+8i)\,z^2 + (-7-2i)\,z - 3 - 3i$ par $2z+1$. Par division euclidienne on a :

$$\begin{array}{ccccccc|c}
2X^3 & + & (-1+8i)\,X^2 & + & (-7-2i)\,X & - & 3-3i & 2X+1 \\ \cline{8-8}
-\,(2X^3 & + & X^2) & & & & & X^2 + (-1+4i)\,X - 3 - 3i \\ \cline{1-3}
 & & (-2+8i)\,X^2 & + & (-7-2i)\,X & - & 3-3i & \\
 & - & ((-2+8i)\,X^2 & + & (-1+4i)\,X) & & & \\ \cline{2-5}
 & & & & (-6-6i)\,X & - & 3-3i & \\
 & & & - & ((-6-6i)\,X & + & -3-3i) & \\ \cline{4-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On obtient alors la même factorisation que dans la méthode précédente : $2X^3 + (-1+8i)\,X^2 + (-7-2i)\,X - 3 - 3i = (2X+1)\left(X^2 + (-1+4i)\,X - 3 - 3i\right)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ainsi, } \forall z \in \mathbb{C}, \\ P(z) = 2z^3 + (-1+8i)\,z^2 + (-7-2i)\,z - 3 - 3i = (2z+1)(z^2 + (-1+4i)z + (-3-3i)).\end{array}}$$

(c) Soit $z \in \mathscr{D}_f$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
P(z) = 0 & \iff & (2z+1)(z^2 + (-1+4i)z + (-3-3i)) = 0 \\
& \iff & 2z+1 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + (-1+4i)z + (-3-3i) = 0 \\
& \iff & z = -\dfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad z^2 + (-1+4i)z + (-3-3i) = 0.
\end{array} \qquad (\star)$$

Il reste à résoudre l'équation $z^2 + (-1+4i)z + (-3-3i) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

- Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = (-1+4i)^2 - 4(1)(-3-3i) = -3+4i$$

- Déterminons les racines carrées de $-3+4i$ i.e. les solutions de l'équation $u^2 = -3+4i$ d'inconnue $u \in \mathbb{C}$.
Soit $u = x+iy \in \mathbb{C}$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rlcl}
& u \text{ est UNE racine carrée de } \Delta & \iff & u^2 = \Delta \iff \left\{\begin{array}{rcl} u^2 & = & \Delta \\ |u|^2 & = & |\Delta| \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} (x+iy)^2 & = & -3+4i \\ x^2+y^2 & = & \sqrt{(-3)^2+4^2} \end{array}\right. & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2+i(2xy) & = & -3+4i \\ x^2+y^2 & = & 5 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & -3 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2+y^2 & = & 5 \end{array}\right. & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} 2y^2 & = & 8 \\ 2xy & = & 4>0 \\ 2x^2 & = & 2 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{l} y = \pm 2 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \\ x = \pm 1 \end{array}\right. & \iff & \left[u = 1+2i \quad \text{ou} \quad u = -1-2i\right]
\end{array}$$

Posons $\delta = 1+2i$ $\boxed{\text{UNE}}$ racine carrée de Δ.

En reprenant les équivalences laissées en ($\star$) :

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\iff \left[z=-\frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad z=\frac{(1-4i)-(1+2i)}{2} \quad \text{OU} \quad z=\frac{(1-4i)+(1+2i)}{2}\right] \\ &\iff \left[z=-\frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad z=-3i \quad \text{OU} \quad z=1-i\right] \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathscr{S}_1$ des solutions de (E_1) est :

$$\mathscr{S}_1=\left\{-\frac{1}{2}\,;\,1-i\,;\,-3i\right\}.$$

7. Soit $z\in\mathscr{D}_f$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & f(z)=z^2+4iz+\frac{(-6+2i)\,z-5-3i}{2z-1} \\ \iff\ & \frac{z-2}{2z-1}=z^2+4iz+\frac{(-6+2i)\,z-5-3i}{2z-1} \\ \iff\ & z-2=(z^2+4iz)(2z-1)+((-6+2i)z-5-3i) \\ \iff\ & 0=2z^3+(-1+8i)z^2+(-4i-6+2i-1)z+(-5-3i+2) \\ \iff\ & 0=2z^3+(-1+8i)z^2+(-7-2i)z+(-3-3i) \\ \iff\ & P(z)=0 \\ \iff\ & z\in\mathscr{S}_1 \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des solutions de (E_2), on a les égalités ensemblistes :

$$\boxed{\mathscr{S}_2=\mathscr{S}_1\cap\mathscr{D}_f=\mathscr{S}_1}.$$

8. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E). On a les équivalences suivantes :

$$z\in\mathscr{S} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z^{10}\neq 0 \\ z^5\neq 0 \\ 2-z^5\neq 0 \\ \frac{1}{z^5}\in\mathscr{D}_f \\ f\left(\frac{1}{z^5}\right)=\left(\frac{1}{z^5}\right)^2+4i\left(\frac{1}{z^5}\right)+\dfrac{(-6+2i)(\frac{1}{z^5})-(5+3i)}{2(\frac{1}{z^5})-1} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z^5\neq 0 \\ z^5\neq 2 \\ \frac{1}{z^5}\in\mathscr{D}_f \\ \frac{1}{z^5}\in\mathscr{S}_2 \end{cases}$$

Soit $z\in\mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^5}\in\mathscr{S}_2 &\iff \frac{1}{z^5}=-\frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \frac{1}{z^5}=1-i \quad \text{OU} \quad \frac{1}{z^5}=-3i \\ &\iff \frac{1}{z^5}=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\pi} \quad \text{OU} \quad \frac{1}{z^5}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{OU} \quad \frac{1}{z^5}=3\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff z^5=2\,\mathrm{e}^{-i\pi} \quad \text{OU} \quad z^5=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{OU} \quad z^5=\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \left[\begin{array}{c} \exists k\in[\![0,4]\!],\ z=2^{\frac{1}{5}}\,\mathrm{e}^{i(-\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})} \\ \text{OU} \\ \exists k\in[\![0,4]\!],\ z=2^{-\frac{1}{10}}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5})} \\ \text{OU} \\ \exists k\in[\![0,4]\!],\ z=3^{-\frac{1}{5}}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Or par unicité de l'écriture de la forme polaire, on voit que chacune des solutions z obtenues ci-dessus vérifie les conditions $z^5\neq 0$, $z^5\neq 2$ et $\frac{1}{z^5}\in\mathscr{D}_f$. Notez que les conditions $z^5=2$ et $\frac{1}{z^5}\in\mathscr{D}_f$ sont équivalentes. On en déduit donc que

$$\boxed{\mathscr{S}=\bigcup_{k\in[\![0,4]\!]}\left\{2^{\frac{1}{5}}\,\mathrm{e}^{i\frac{(2k-1)\pi}{5}},2^{-\frac{1}{10}}\,\mathrm{e}^{i\frac{(8k+1)\pi}{20}},3^{-\frac{1}{5}}\,\mathrm{e}^{i\frac{(4k+1)\pi}{10}}\right\}.}$$