Épreuve de Mathématiques 3 - Partie I
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 2h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Questions de cours

Les questions 1 et 2 sont totalement indépendantes.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^x$$

   (b) Déterminer, si elles existent, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   (c) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f, puis déterminer l'expression de sa dérivée que l'on donnera sous forme factorisée.

2. Calculer en justifiant avec soin les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3\mathrm{e}^{4x}+3}{7x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{4\tan(3x)+\sqrt{7x+1}-1}{2x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{-7\mathrm{e}^{-2x}}{4x^3}$$

Problème 1 – Banque PT 2015 Sujet C

Soit n un entier naturel non nul. On considère les fonctions f_n et g_n définies, pour tout réel x, par :

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1$$

On définit, pour tout réel x, la fonction sinus hyperbolique notée sh par :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Étudier la parité de f_n et g_n. Expliquer pourquoi on peut restreindre le domaine d'étude de ces fonctions.
2. On souhaite ici tracer les courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{g_1}$ des fonctions f_1 et g_1 sur un même graphe.

   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f_1(x) - g_1(x)$ à l'aide de $\mathrm{sh}(x^2)$ et x^2.

   (b) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$\mathrm{sh}(t) \geqslant t$$

   En déduire la position relative de $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{g_1}$ sur $\mathbb{R}^+$.

   (c) Déterminer les équations des tangentes respectives à $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{g_1}$ au point d'abscisse 0, ainsi qu'au point d'abscisse 1.

   (d) À l'aide de ces éléments, représenter avec soin sur un même graphe les courbes $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{g_1}$ sur $[0, 1]$ dans un repère orthonormé direct. On prendra comme unité 10 cm.

On suppose dans toute la suite du problème que $n \geqslant 2$.

3. (a) Calculer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $g_n'(x)$.
   (b) Étudier les variations de f_n et g_n sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$f_n(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad g_n(x) > 0$$

4. On définit lorsque c'est possible la fonction h_n par :

$$h_n(x) = \frac{\ln\left(f_n(x)\right)}{x}$$

   (a) Déterminer dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de h_n noté $\mathscr{D}_{h_n}$. Quelle est la parité de h_n ?
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}_{h_n}$, on a

$$h_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{1}{x}\ln\left(1 - u_n(x)\right),$$

   où u_n est une fonction que l'on déterminera.
   (c) En déduire que h_n possède une asymptote oblique en $+\infty$.
   (d) Préciser la position relative de la courbe représentative de h_n par rapport à son asymptote en $+\infty$.

5. (a) Déduire de la question 3 (c) que pour tout réel x de l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$:

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

   L'inégalité de droite est-elle encore vraie sur $\mathbb{R}^+$?
   (b) Dans cette question, on suppose x fixé dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^t$$

   En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

6. (a) Rappeler la formule du binôme de Newton avec toutes les hypothèses associées.
   (b) En déduire que pour tout réel positif x :

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$$

Fin de l'épreuve

Épreuve de Mathématiques 3 - Partie II
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 2h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :
$$(z+1)^n + (z-1)^n = 0. \tag{E}$$
   (a) Résoudre (E).
   (b) Démontrer que les solutions de (E) sont toutes imaginaires pures.
2. Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y. \end{cases}$$
3. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que
$$\log_3(x)\log_9(x) = 2.$$

Problème 1

On considère la fonction suivante
$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x + \sqrt{4+x^2}}{2}\right).$$
On note Γ_f le graphe de la fonction f.

Partie A : Etude de f et tracé de Γ_f

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{4+x^2} > 0$.
2. En déduire $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
3. Etudier la parité de f.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. (a) Démontrer sans dérivation que f est strictement croissante.
   (b) Justifier que f définit une bijection dont on précisera l'espace d'arrivée. Que sait-on de f^{-1} ?
6. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée de f.
   (b) Retrouver le résultat de la question 5a.
7. On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = f(x) - \ln(x)$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   (c) Quelle est le comportement de Γ_f en $+\infty$? en $-\infty$?
8. Déterminer l'équation de T la tangente à Γ_f au point d'abscisse 0.
9. Déterminer la position relative de Γ_f et de T.
10. Tracer en annexe **à rendre avec la copie** le graphe de f.
11. Par quelle transformation du plan peut-on obtenir $\Gamma_{f^{-1}}$ le graphe de la fonction réciproque de f à partir de Γ_f ? Représenter $\Gamma_{f^{-1}}$ en annexe.

Partie B : Détermination de f^{-1}

12. On souhaite montrer, sans utiliser les résultats de la partie précédente, que f est injective.
    (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que
    $$f(x) = f(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-y)\left(\sqrt{4+y^2}+\sqrt{4+x^2}\right) = y^2 - x^2.$$
    (b) En déduire que f est injective.
13. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
14. Retrouver le résultat que f est bijective et en déduire une expression explicite de f^{-1}
15. Par quelle transformation obtient-on Γ_f^{-1} à partir du graphe de la fonction sh ?

Fin de l'épreuve

ANNEXE

A RENDRE AVEC LA COPIE