Corrigé du Devoir Surveillé 3

Question de cours

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Par conséquent, $f(x)$ existe si et seulement si $\ln(x)$ existe i.e. si et seulement si $x > 0$.
$\boxed{\text{L'ensemble de de définition de } f \text{ est donc }]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*.}$

(b) Puisque $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par produit, $x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par composition, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

D'autre part, par croissance comparée, on sait que $x\ln(x) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} 0$ et par composition, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1.}$$

(c) La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+^*$, comme composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. De plus

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = (x\ln(x))'\,\mathrm{e}^{x\ln(x)} = \left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right)\mathrm{e}^{x\ln(x)}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et} \quad \forall x > 0, \quad f'(x) = (1+\ln(x))\,x^x.}$$

2. - Soit $x \neq 0$. On a $\frac{-3\,\mathrm{e}^{4x}+3}{7x} = \frac{-3}{7}\frac{\mathrm{e}^{4x}-1}{x}$. Posons $u = 4x$. On obtient alors que

$$\frac{-3\,\mathrm{e}^{4x}+3}{7x} = \frac{-3}{7}\frac{\mathrm{e}^{u}-1}{\frac{u}{4}} = \frac{-12}{7}\frac{\mathrm{e}^{u}-1}{u}.$$

Or $u \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et d'après le cours (ou en reconnaissant le taux de variation de la fonction exponentielle) $\frac{\mathrm{e}^u-1}{u} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$. Par conséquent

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{-3\,\mathrm{e}^{4x}+3}{7x} = \frac{-12}{7}\times 1 = \frac{-12}{7}.}$$

- On a

$$\lim_{x\to0} \frac{4\tan(3x)+\sqrt{7x+1}-1}{2x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{2\tan(3x)}{x} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7x+1}-1}{x}\right).$$

Or la fonction $u : x \mapsto 2\tan(3x)$ est dérivable en 0 et de plus $u'(0) = 6\left(1+\tan^2(3\times0)\right) = 6$. Donc

$$\lim_{x\to0}\frac{2\tan(3x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{u(x)-u(0)}{x-0} = 6.$$

De plus la fonction $v : x \mapsto \sqrt{7x+1}$ est aussi dérivable en 0 et $v'(0) = \frac{7}{2\sqrt{7\times0+1}} = \frac{7}{2}$. Donc

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7x+1}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{v(x)-v(0)}{x-0} = \frac{1}{2}\times\frac{7}{2} = \frac{7}{4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{4\tan(3x)+\sqrt{7x+1}-1}{2x} = 6 + \frac{7}{4} = \frac{31}{4}.}$$

- On sait que $e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et de même $\frac{1}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi par produit des limites :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{-7\,e^{-2x}}{4x^3} = \frac{-7}{4} \times 0 = 0.}$$

Problème 1 – Banque PT 2015 Sujet C

---

1. D'une part : $\mathscr{D}_{f_n} = \mathscr{D}_{g_n} = \mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0.
   D'autre part, un calcul rapide (laissé au lecteur) montre que pour tout $x \in \mathscr{D}_{f_n} = \mathscr{D}_{g_n} = \mathbb{R}$:

$$f_n(-x) = f_n(x) \qquad \text{et} \qquad g_n(-x) = g_n(x)$$

   Conclusion : f_n et g_n sont des fonctions paires. Donc $\mathscr{C}_{f_n}$ et $\mathscr{C}_{g_n}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, il suffit alors de les étudier sur $\mathbb{R}^+$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On a : $f_1(x) - g_1(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 - (e^{-x^2} + x^2 - 1) = 2\mathrm{sh}(x^2) - 2x^2$.
   Conclusion : on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) - g_1(x) = 2\mathrm{sh}(x^2) - 2x^2.}$$

   (b) Montrons que $\forall t \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(t) \geqslant t$, c'est-à-dire $\mathrm{sh}(t) - t \geqslant 0$. Pour tout $t \geqslant 0$, posons $f(t) = \mathrm{sh}(t) - t$. Étudions les variations de f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 = \mathrm{ch}(t) - 1$.
   Méthode 1. Soit $t \geqslant 0$. On a l'équivalence suivante :

$$f'(t) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^t + e^{-t} \geqslant 2.$$

   Posons $X = e^t > 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} f'(t) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad X + \frac{1}{X} \geqslant 2 \quad &\Leftrightarrow \quad X^2 + 1 \geqslant 2X \qquad \text{car } X > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 - 2X + 1 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (X-1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

   La dernière assertion étant toujours vraie on en déduit que $\forall t \geqslant 0$, $f'(t) \geqslant 0$.
   Méthode 2. La fonction f' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geqslant 0$, $f''(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Or pour tout $t \geqslant 0$, $e^t \geqslant 1 \geqslant e^{-t}$. Par conséquent pour tout $t \geqslant 0$, $f''(t) \geqslant 0$. On en déduit que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et notamment pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) \geqslant f'(0) = 0$.
   Dans tous les cas, nous avons montré que f' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$: Dressons le tableau suivant pour résumer la situation :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
f	$0 \nearrow$
$f(t)$	$+$

On vient donc de montrer que

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad \text{sh}(t) \geqslant t.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (et même pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a $x^2 \geqslant 0$ donc on peut remplacer t par x^2 dans l'inégalité ci-dessus pour établir que : $f_1(x) - g_1(x) = 2(\text{sh}(x^2) - x^2) \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Autrement dit } \mathscr{C}_{f_1} \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_{g_1} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

(c) L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une certaine fonction f dérivable au point d'abscisse a est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Les fonctions f_1 et g_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2} - 2x \qquad \text{et} \qquad g_1'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + 2x$$

On obtient donc les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{llll} f_1(0) = 0, & f_1'(0) = 0, & f_1(1) = \mathrm{e} - 2 & f_1'(1) = 2(\mathrm{e} - 1) \\ g_1(0) = 0, & g_1'(0) = 0, & g_1(1) = \mathrm{e}^{-1} & g_1'(1) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \end{array}$$

En vertu de ces résultats, on trouve que les équations des tangentes à $\mathscr{C}_{f_1}$ sont :
◇ au point d'abscisse 0 : $y = 0$.
◇ au point d'abscisse 1 : $y = 2(\mathrm{e} - 1)(x-1) + \mathrm{e} - 2 = 2(\mathrm{e}-1)x - e$
De même, on trouve que les équations des tangentes à $\mathscr{C}_{g_1}$ sont :
◇ au point d'abscisse 0 : $y = 0$.
◇ au point d'abscisse 1 : $y = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)(x-1) + \mathrm{e}^{-1} = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)x - 2 + 3\,\mathrm{e}^{-1}$.

(d) Laissé au lecteur. Aidez-vous de votre calculatrice pour vérifier vos tracés si besoin est.

3. On suppose $n \geqslant 2$.

(a) Les fonctions f_n et g_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f_n'(x) = \frac{2x}{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad g_n'(x) = \frac{2x}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\right).}$$

(b) Pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} \geqslant 1$ et $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}} \leqslant 1$ d'où $f_n'(x) \geqslant 0$ et $g_n'(x) \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Conclusion : } f_n \text{ et } g_n \text{ sont croissantes sur } \mathbb{R}_+.}$

(c) On commence par préciser le résultat de la question précédente. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} > 1$ et $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}} < 1$. On en déduit que pour tout $x > 0$, $f_n'(x) > 0$ et $g_n'(x) > 0$. Ainsi les fonctions f_n et g_n sont strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (la dérivée étant strictement positif sauf éventuellement en 0).

$\boxed{\text{Par conséquent, pour tout } x > 0,\ f_n(x) > f_n(0) = 0 \text{ et } g_n(x) > g_n(0) = 0.}$

4. (a) La fonction f_n étant définie sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équivalence suivante

$$x \in \mathscr{D}_{h_n} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f_n(x) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Or d'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $f_n(x) > 0$. De plus, d'après la question 1, la fonction f_n est paire. Ainsi pour tout $x \neq 0$, $f_n(x) > 0$ et par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathscr{D}_{h_n} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \neq 0.$$

Autrement dit

$$\boxed{\mathscr{D}_{h_n} = \mathbb{R}^*.}$$

L'ensemble $\mathscr{D}_{h_n}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, toujours d'après la question 1,

$$h_n(-x) = \frac{\ln\left(f_n(-x)\right)}{-x} = \frac{\ln\left(f_n(x)\right)}{-x} = -h_n(x).$$

$\boxed{\text{Conclusion, la fonction } h_n \text{ est impaire.}}$

(b) Soit $x \in \mathscr{D}_{h_n} = \mathbb{R}^*$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} h_n(x) = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1\right)}{x} &= \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\left(\frac{x^2}{n}+1\right)\right)\right)}{x} \\ &= \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}\right) + \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\left(\frac{x^2}{n}+1\right)\right)}{x} \\ &= \frac{\frac{x^2}{n}}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\left(\frac{x^2}{n}+1\right)\right) \\ &= \frac{x}{n} + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\left(\frac{x^2}{n}+1\right)\right). \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \neq 0$, $u_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\left(\frac{x^2}{n}+1\right)$. Alors pour tout $x \neq 0$,

$$h_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{1}{x}\ln\left(1 - u_n(x)\right).$$

(c) Soit $x > 0$, posons $y = \frac{x^2}{n}$. On a

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-y}(y+1) = y\,\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-y}.$$

Or $y \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $y\,\mathrm{e}^{-y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{e}^{-y} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0.$$

On en déduit donc que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\ln\left(1 - u_n(x)\right) = 0 \times \ln(1) = 0.$$

Et donc d'après la question précédente,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{x^2}\ln\left(1 - u_n(x)\right) = \frac{1}{n}.$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h_n(x) - \frac{x}{n}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1 - u_n(x)\right).$$

Et par ce qui précède,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h_n(x) - \frac{x}{n}\right) = 0 \times \ln(1) = 0.$$

En conclusion, le graphe de la fonction h_n admet une asymptote oblique de direction $y = \frac{x}{n}$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. D'après la question 4b, $h_n(x) - \frac{x}{n} = \ln\left(1 - u_n(x)\right)$ où $u_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\left(\frac{x^2}{n}+1\right)$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} h_n(x) - \frac{x}{n} \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(1 - u_n(x)\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - u_n(x) \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad u_n(x) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\left(\frac{x^2}{n}+1\right) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{n} + 1 \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{n} \leqslant -1. \end{aligned}$$

La dernière assertion n'étant jamais vraie pour $x \neq 0$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h_n(x) - \frac{x}{n} < 0$.

Ainsi le graphe de la fonction h_n se trouve toujours au dessous de son asymptote oblique d'équation $y = x/n$.

5. (a) Soit $x \in [0; \sqrt{n}]$. Si $x > 0$, on a vu dans la question 3.(c) que

$$g_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1 > 0.$$

i.e.

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}} > 1 - \frac{x^2}{n}.$$

Or la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et les réels $1 - \frac{x^2}{n}$ et $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}$ sont positifs pour $x \in [0, \sqrt{n}]$. On en déduit que $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$. L'inégalité reste vraie si $x = 0$ (on a même égalité dans ce cas) et donc pour tout $x \in [0; \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}.$$

De même, d'après la question 3.(c), pour $x > 0$, on a

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 > 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} > 1 + \frac{x^2}{n}.$$

La fonction $u \mapsto u^{-n}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et les réels $1 + \frac{x^2}{n}$ et $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}$ sont supérieurs ou égaux à 1 pour $x > 0$, on en déduit que pour tout $x > 0$: $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \geqslant \mathrm{e}^{-x^2}$, ce qui est encore vrai si $x = 0$.

Conclusion : on vient de montrer que

$$\forall x \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

et on a vu que l'inégalité de droite reste encore vraie sur $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}$ par un argument de parité).

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$.
En posant $m = \frac{t}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, on a les égalités suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{t\frac{n}{t}\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)} = \lim_{m\to0} e^{t\left(\frac{1}{m}\ln(1+m)\right)} = \mathrm{e}^t$$

La dernier égalité vient du fait que $\lim_{m\to0} \frac{1}{m} \ln(1+m) \to 1$ (c'est un résultat du cours).
Conclusion : on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^t.}$$

Le résultat qu'on vient de montrer est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc on peut remplacer t par $-x^2$, puis par x^2 (x est fixé dans cette question par l'énoncé) pour trouver :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} = \mathrm{e}^{-x^2}.}$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par positivité des termes manipulés, on a l'équivalence suivante :

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + x^2 \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$$

Il suffit donc de montrer l'inégalité à droite de l'équivalence pour montrer le résultat voulu.
Par la formule du binôme de Newton :

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{2k}}{n^k} = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{x^2}_{k=1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{2k}}{n^k}}_{\geqslant 0} \geqslant 1+x^2$$

Ce qui montre bien en particulier que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\boxed{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.}$$

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :
$$(z+1)^n + (z-1)^n = 0. \tag{E}$$

   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{array}{lcl} (E) & \Leftrightarrow & (z+1)^n = -(z-1)^n \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} z \neq 1 \quad \text{et} \quad \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = -1 \\ \text{ou} \\ z = 1 \quad \text{et} \quad 2^n = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = -1 \quad \text{et} \quad z \neq 1. \end{array}$$

   Déterminons les racines n-ièmes de -1. Une forme polaire de -1 est $\mathrm{e}^{i\pi}$. Par conséquent, pour $Z \in \mathbb{C}$,
$$Z^n = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad Z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}.$$

   Par suite, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,
$$\begin{array}{lcl} (E) & \Leftrightarrow & \exists k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \dfrac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}} \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad z+1 = (z-1)\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}} \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}. \end{array}$$

   Or pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$ (en d'autres termes, 1 n'est pas une racine n-ième de -1) et donc
$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad z = -\frac{1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}}.$$

   On vérifie que les solutions obtenues sont bien différentes de 1. En effet pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et $\omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}$, on a
$$\begin{array}{lcll} -\dfrac{1+\omega_k}{1-\omega_k} = 1 & \Leftrightarrow & -1 - \omega_k = 1 - \omega_k & \text{car } \omega_k \neq 1 \\ & \Leftrightarrow & -1 = 1 & \text{impossible.} \end{array}$$

   En conclusion l'ensemble des solutions de (E) est
$$\boxed{\left\{ -\frac{1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}} \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.}$$

   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). D'après la question précédente, il existe $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que
$$z = -\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k}, \qquad \text{avec } \omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}}.$$

   Puisque $\omega_k \in \mathbb{U}$ est de module 1, on en déduit que $\overline{\omega_k} = \frac{1}{\omega_k}$. Ainsi
$$\overline{z} = -\frac{1 + \overline{\omega_k}}{1 - \overline{\omega_k}} = -\frac{1 + \frac{1}{\omega_k}}{1 - \frac{1}{\omega_k}} = -\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{1+\omega_k}{1-\omega_k} = -z$$

   ce qui implique que $z \in i\mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{On a donc montré que toute solution de } (E) \text{ est imaginaire pure.}}$

2. On commence par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $8^x = \mathrm{e}^{x\ln(8)} > 0$ et donc si $10y = 8^x$ alors $y > 0$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ \ln(8^x) = \ln(10y) \\ \ln(2^x) = \ln(5y) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ x\ln(8) = \ln(10) + \ln(y) \\ x\ln(2) = \ln(5) + \ln(y) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ x\left(\ln(8) - \ln(2)\right) = \ln(10) - \ln(5) \\ x\ln(2) = \ln(5) + \ln(y) \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ x = \frac{\ln(2)}{\ln(4)} = \frac{1}{2} \\ \ln(y) = \frac{\ln(2)}{2} - \ln(5) = \frac{\ln(2) - 2\ln(5)}{2} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) \end{cases} .
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{5} \end{cases}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a par définition

$$\log_3(x)\log_9(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(3)}\frac{\ln(x)}{\ln(9)} = \frac{\ln^2(x)}{2\ln^2(3)}.$$

Par conséquent, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\log_3(x)\log_9(x) = 2 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\ln^2(x)}{2\ln^2(3)} = 2 \\
& \Leftrightarrow \quad \ln^2(x) = 2^2\ln^2(3) \\
& \Leftrightarrow \quad \ln(x) = 2\ln(3) = \ln(9) \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -2\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad x = 9 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\log_3(x)\log_9(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{9}.}$$

Problème 1

On considère la fonction suivante

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2}\right).$$

On note Γ_f le graphe de la fonction f.

Partie A : Etude de f et tracé de Γ_f

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$x+\sqrt{4+x^2}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4+x^2}>-x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ \text{ou} \\ x\leqslant 0 \quad \text{et} \quad 4+x^2>x^2 \end{cases}.$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ x+\sqrt{4+x^2}>0.}$

2. Il s'ensuit immédiatement que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R},\ \mathscr{D}_f=\mathbb{R}.}$

3. L'ensemble $\mathscr{D}_f$ est bien sûr centré en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x)=\ln\left(\frac{-x+\sqrt{4+(-x)^2}}{2}\right) &= -\ln\left(\frac{2}{-x+\sqrt{4+x^2}}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{2}{-x+\sqrt{4+x^2}}\times\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{x+\sqrt{4+x^2}}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{2\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)}{x^2+4+x^2}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right) = -f(x). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On en déduit donc que la fonction } f \text{ est impaire.}}$

4. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}=+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)=+\infty.}$$

5. (a) Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0\leqslant x<y$. Alors $0\leqslant x^2<y^2$ et $\sqrt{4+x^2}<\sqrt{4+y^2}$. Donc $x+\sqrt{4+x^2}<y+\sqrt{4+y^2}$ et donc $f(x)<f(y)$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est impaire (d'après la question 3), on conclut que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

   (b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, f définie une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{x\to-\infty} f(x);\lim_{x\to+\infty} f(x)[$. On a déjà vu dans la question 4 que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Or f est impaire (d'après la question 3). Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

   Ainsi f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus sa réciproque, définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

6. (a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $4+x^2\geqslant 4>0$ donc la fonction $x\mapsto\sqrt{4+x^2}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus d'après la question 1 $x+\sqrt{4+x^2}>0$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x)=\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)'\times\frac{2}{x+\sqrt{4+x^2}} &= \left(\frac{1}{2}+\frac{2x}{4\sqrt{4+x^2}}\right)\times\frac{2}{x+\sqrt{4+x^2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2\sqrt{4+x^2}}\right)\times\frac{2}{x+\sqrt{4+x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}. \end{aligned}$$

   Conclusion : on a montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}.$$

   (b) D'après la question précédente, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$. Donc $\boxed{\text{la fonction est bien strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

7. On pose pour tout $x>0$, $g(x)=f(x)-\ln(x)$.
   (a) Soit $x>0$. On a
$$g(x)=\ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)-\ln(x)=\ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2x}\right)=\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)-\ln(2).$$
   Or $\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=\ln(2)-\ln(2)=0.}$$
   (b) En utilisant la question précédente, on écrit que
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}+\frac{g(x)}{x}.$$
   Le premier terme tend vers 0 par croissance comparée et le second également d'après la limite précédente. D'où
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.}$$
   (c) Nous avons vu à la question 4 que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ce qui couplé à la question précédente nous permet de conclure que
   $\boxed{\text{le graphe } \Gamma_f \text{ possède une branche parabolique de direction } (Ox) \text{ en } +\infty.}$
   La fonction étant impaire (question 3) on en déduit que
   $\boxed{\text{le graphe } \Gamma_f \text{ possède aussi une branche parabolique de direction } (Ox) \text{ en } -\infty.}$
8. En utilisant la question 6a, on a $f(0)=\ln\left(\frac{2}{2}\right)=0$ et $f'(0)=\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{\text{l'équation de la tangente } T \text{ est } y=\frac{x}{2}.}$
9. On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-\frac{x}{2}$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et d'après la question 6a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$h'(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{1}{2}.$$
   Soit $x\in\mathbb{R}$. On a
$$h'(x)>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}>\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{4+x^2}<2\quad\Leftrightarrow\quad 4+x^2<4.$$
   La dernière assertion n'étant jamais vraie, on en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)\leqslant 0$ et donc la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0)=f(0)-0=0$. Donc pour tout $x\geqslant 0$, $h(x)\leqslant 0$ et donc $f(x)\leqslant\frac{x}{2}$. A contrario pour tout $x\leqslant 0$, $h(x)\geqslant 0$ et $f(x)\geqslant\frac{x}{2}$.
   $\boxed{\text{Par conséquent, } \Gamma_f \text{ est au-dessus la tangente } T \text{ sur }]-\infty;0] \text{ et en dessous de la tangente } T \text{ sur } [0;+\infty[.}$
10. Voir sur votre calculatrice.
11. C'est un résultat de cours $\boxed{\text{le graphe de } \Gamma_{f^{-1}} \text{ s'obtient de celui de } \Gamma_f \text{ par la symétrie axiale d'axe } y=x.}$

Partie B : Détermination de f^{-1}

12. On souhaite montrer, sans utiliser les résultats de la partie précédente, que f est injective.
   (a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}f(x)=f(y)\quad&\Leftrightarrow\quad\ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)=\ln\left(\frac{y+\sqrt{4+y^2}}{2}\right)\\&\Leftrightarrow\quad x+\sqrt{4+x^2}=y+\sqrt{4+y^2}\\&\Leftrightarrow\quad x-y=\sqrt{4+y^2}-\sqrt{4+x^2}.\end{aligned}$$
   En multipliant par « l'expression conjuguée », on obtient que
$$\boxed{f(x)=f(y)\quad\Leftrightarrow\quad(x-y)\left(\sqrt{4+y^2}+\sqrt{4+x^2}\right)=4+y^2-(4+x^2)=y^2-x^2.}$$

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$ alors par la question précédente

$$(x-y)\left(\sqrt{4+y^2}+\sqrt{4+x^2}\right) = 4+y^2-(4+x^2) = y^2-x^2 = -(x-y)(y+x).$$

Supposons $x \neq y$ alors

$$\sqrt{4+y^2}+\sqrt{4+x^2} = -x-y \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{4+y^2}+y+\sqrt{4+x^2}+x = 0.$$

Or d'après la question 1, on a $\sqrt{4+y^2}+y > 0$ et $\sqrt{4+x^2}+x > 0$, par conséquent $\sqrt{4+y^2}+y+\sqrt{4+x^2}+x > 0$ ce qui contredit l'assertion précédente. Donc l'hypothèse $x \neq y$ est fausse et de fait $x = y$. On a donc montré que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$:

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est injective sur } \mathbb{R}.}$

13. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) = y \quad & \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right) = y \\
& \Leftrightarrow \quad x+\sqrt{4+x^2} = 2\,\mathrm{e}^y \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{4+x^2} = 2\,\mathrm{e}^y - x \\
& \Leftrightarrow \quad 4+x^2 = (2\,\mathrm{e}^y - x) \quad \text{et} \quad 2\,\mathrm{e}^y - x > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 4+x^2 = 4\,\mathrm{e}^{2y} - 4\,\mathrm{e}^y x + x^2 \quad \text{et} \quad 2\,\mathrm{e}^y - x > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 4\,\mathrm{e}^y x = 4\,\mathrm{e}^{2y} - 4 \quad \text{et} \quad 2\,\mathrm{e}^y - x > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y} \quad \text{et} \quad 2\,\mathrm{e}^y - (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}) > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } y \in \mathbb{R}, \text{ l'équation } y = f(x) \text{ admet une unique solution } x = 2\,\mathrm{sh}(y).}$

14. $\boxed{\text{D'après la question précédente, } f \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et de plus pour tout } y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = 2\,\mathrm{sh}(y).}$

15. D'après la formule précédente, on en déduit que

$\boxed{\text{le graphe de } f^{-1} \text{ s'obtient à partir du graphe de sh par une dilatation verticale de coefficient 2.}}$

Fin de l'épreuve