Épreuve de Mathématiques 4
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 2h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - D'après Banque PT 2013 Sujet A

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 1.

Définition 1. Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite STOCHASTIQUE si elle vérifie les deux conditions suivantes :

i) les coefficients de la matrice sont tous positifs ou nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0$$

ii) la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice est égale à 1, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Définition 2. Une suite de matrices (carrées de taille n) $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ CONVERGE vers une matrice B si les coefficients de B_p convergent vers le coefficient de B situé à la même position, c'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (b_p)_{ij} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} b_{ij}$$

Les notations $(b_p)_{ij}$ et b_{ij} désignent les coefficients (i,j) respectifs des matrices B_p et B.

Partie I - Préliminaires

1. Soit A et B deux matrices stochastiques.
   Montrer que le produit AB est une matrice stochastique.
2. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Montrer le résultat suivant :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \leqslant 1$$

Partie II - Étude d'un exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A = \alpha \mathcal{I}_3 + \beta J$.
5. En déduire à l'aide de la formule du binôme de Newton que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A^p = \frac{1}{2^p}\mathcal{I}_3 + \frac{p}{2^p}J + \left(1 - \frac{p+1}{2^p}\right)J^2 \qquad (\bigstar)$$

6. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, et que sa limite $A_\infty = \lim\limits_{p\to+\infty} A^p$ est une matrice stochastique.
7. (a) Justifier sans aucun calcul que la matrice A est inversible.
   (b) La formule $(\bigstar)$ précédemment établie est-elle encore valable pour $p = -1$?
   (c) En déduire A^{-1}. *On explicitera les coefficients.*

Problème 2 - Résolution d'équation différentielles du second ordre à coefficients constants

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes.

On considère l'équation différentielle (E) suivante où f est une fonction continue sur un intervalle I et d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable :

$$\forall x \in I,\ y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = f(x) \qquad (E)$$

Préliminaire - Résolution de (E_0)

1. Résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E). *On donnera l'ensemble des solutions sous notation ensembliste et sous forme de* Vect.

Partie I - Cas où $f(x) = 8x + 20$

Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle (E) dans le cas où $f(x) = 8x + 20$:

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 8x + 20 \qquad (E)$$

2. (a) Déterminer une solution particulière y_1 de (E) sous la forme $y_1(x) = ax + b$, où a, b sont des constantes à déterminer. *On précisera l'intervalle I de résolution.*
   (b) En déduire la résolution complète de (E).
3. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) & = & 8x + 20 \\ y(0) = 0 & , & y'(0) = 0 \end{array} \right.$$

Partie II - Cas où $f(x) = -3\cos(2x)$

Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle (E) dans le cas où $f(x) = -3\cos(2x)$:

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = -3\cos(2x) \qquad (E)$$

4. Déterminer une solution particulière z_2 de l'équation différentielle $(\tilde{E})$ suivante :

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \mathrm{e}^{i2x} \qquad (\tilde{E})$$

   On précisera l'intervalle I de résolution.
5. En déduire en justifiant avec soin une solution particulière y_2 de (E).
6. En déduire la résolution complète de (E).

Partie III - Cas où $f(x) = \frac{3}{2} + 2x + 3\cos^2 x$

On pourra utiliser les résultats établis dans les parties précédentes.

Le but de cette partie est de résoudre l'équation (E) dans le cas où $f(x) = \frac{3}{2} + 2x + 3\cos^2 x$:

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \frac{3}{2} + 2x + 3\cos^2 x \qquad (E)$$

7. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{3}{2} + 2x + 3\cos^2 x = \alpha(8x+20) + \beta(-3\cos(2x)) + \gamma$$

8. En déduire en justifiant avec soin une solution particulière y_3 de (E).
9. En déduire la résolution complète de (E).