Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 4 2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 2h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - D'après Banque PT 2013 Sujet A

Partie I - Préliminaires

1. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices stochastiques et $C = AB = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrons que C est stochastique i.e.

$$(i) \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{ij} \geqslant 0$$
$$(ii) \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 1.$$

$\boxed{(i)}$ Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$c_{ij} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{\geqslant 0} \underbrace{b_{kj}}_{\geqslant 0}}_{\geqslant 0}.$$

$\boxed{(ii)}$ Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{\ell j}\right)}_{=1} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} = 1.$$

$\boxed{\text{Conclusion : on a bien montré que si } A \text{ et } B \text{ sont stochastiques, alors } AB \text{ est stochastique.}}$

2. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrons que $a_{ij} \leqslant 1$. On a l'inégalité entre réels suivantes :

$$a_{ij} \leqslant \underbrace{a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}}_{=1 \text{ car } A \text{ est stochastique}} \qquad \textit{car les coefficients de } A \textit{ sont positifs.}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall (i,j) \in [\![i,j]\!]^2,\ a_{ij} \leqslant 1.}$

Partie II - Étude d'un exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

3. On a les égalités matricielles suivantes :

$$J^0 = \mathcal{I}_3 \qquad J^1 = J \qquad J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J^3 = J^2.$$

On intuite alors que :

$$\forall k \geqslant 2,\ J^k = J^2.$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall k \geqslant 2,\ \underbrace{J^k = J^2}_{\mathcal{H}_k}.$$

– *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{H}_2$ est vraie i.e. $J^2 = J^2$. C'est trivial !

- *Hérédité.* Soit $k \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie i.e. $J^{k+1} = J^2$.
  On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} J^{k+1} &= J^k \times J && \textit{par définition d'une puissance} \\ &= J^2 \times J && \textit{par hypothèse de récurrence} \\ &= J^3 \\ &= J^2, \end{aligned}$$

  ce qui achève la récurrence.

On a bien montré par récurrence que : $\forall k \geqslant 2,\ J^k = J^2$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N},\ J^k = \begin{cases} \mathcal{I}_3 & \text{si } k = 0 \\ J & \text{si } k = 1 \\ J^2 & \text{si } k \geqslant 2. \end{cases}}$$

4. $\boxed{\text{Conclusion : } A = \frac{1}{2}(\mathcal{I}_3 + J).}$

5. Comme $\mathcal{I}_3 J = J \mathcal{I}_3$, on a le droit d'appliquer la formule du binôme de Newton.
Calculons alors pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^p &= \frac{1}{2^p}(\mathcal{I}_3 + J)^p \\ &= \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J^k \mathcal{I}_3^{p-k} && \textit{par la formule du binôme de Newton} \\ &\underset{p \geqslant 2}{=} \frac{1}{2^p}\left[\underbrace{\mathcal{I}_3}_{k=0} + \underbrace{pJ}_{k=1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} J^2}_{k=2} \right] && \textit{par la relation de Chasles et } \forall p \geqslant 2, J^p = J^2 \\ &= \frac{1}{2^p}(\mathcal{I}_3 + pJ + (2^p - p - 1)J^2) && \textit{car } \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}}_{k \geqslant 0} - \underbrace{\binom{p}{1}}_{k=0} - \underbrace{\binom{p}{0}}_{k=1} = 2^p - p - 1 \\ &= \frac{1}{2^p}\mathcal{I}_3 + \frac{p}{2^p} J + \left(1 - \frac{p+1}{2^p}\right) J^2. \end{aligned}$$

On vient d'établir le résultat demandé pour tout $p \geqslant 2$, et on vérifie qu'il reste encore valable pour $p = 0$ et $p = 1$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \frac{1}{2^p}\mathcal{I}_3 + \frac{p}{2^p} J + \left(1 - \frac{p+1}{2^p}\right) J^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^p} & \frac{p}{2^p} & 1 - \frac{p+1}{2^p} \\ 0 & \frac{1}{2^p} & 1 - \frac{1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

6. Calculons :

$$\frac{1}{2^p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(Opérations)} \qquad\qquad \frac{p}{2^p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(Croissances comparées)}$$

et aussi :

$$\frac{p+1}{2^p} = 2 \times \frac{p+1}{2^{p+1}} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(Croissances comparées)}$$

On en déduit alors que $\lim\limits_{p \to +\infty} A^p = J^2$ qui est bien stochastique.

$\boxed{\text{Conclusion : } (A^p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } A_\infty = J^2 \text{ qui est stochastique.}}$

7. (a) La matrice A est échelonnée et admet trois pivots, donc est de rang 3. Or son rang est égal à sa taille, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.
   (b) Montrons que la formule ($\bigstar$) est encore vraie pour $p = -1$ i.e. que $A^{-1} = 2\mathcal{I}_3 - 2J + J^2$.
   Pour ce faire, il suffit de vérifier que $A \times (2\mathcal{I}_3 - 2J + J^2) = \mathcal{I}_3$.

On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} A \times (2\mathcal{I}_3 - 2J + J^2) & \underset{q4)}{=} \frac{1}{2}(\mathcal{I}_3 + J)(2\mathcal{I}_3 - 2J + J^2) \\ & = \frac{1}{2}\left[(2)\mathcal{I}_3 + (-2+2)J + (1-2)J^2 + (1)J^3\right] \\ & \underset{J^3=J^2}{=} \mathcal{I}_2. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : on a bien montré que la formule } (\bigstar) \text{ reste valable pour } p = -1.}$

(c) On a les égalités matricielles suivantes :

$$A^{-1} = 2\mathcal{I}_3 - 2J + J^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problème 2 - Résolution d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Partie 0 - Préliminaire

1. L'équation homogène (E_H) associée à l'équation (E) et l'équation caractéristique (E_C) qui en découle sont données par

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad (E_H)$$
$$r^2 + 4r + 4 = 0 \qquad (E_C)$$

Or $(E_C) \iff (r+2)^2 = 0 \iff r = -2$. Donc $\Delta = 0$.
On en déduit que l'ensemble de $\boxed{\text{TOUTES}}$ les fonctions solutions de (E_H) est :

$$\boxed{\mathscr{S}_H = \left\{ y_H : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_H(x) = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie I - Cas où $f(x) = 8x + 20$

2. (a) L'équation différentielle (E) est de la forme $ay'' + by' + cy = f(x)$ avec :

$$a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = 4 \qquad f(x) = 8x + 20$$

et f est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.
Les solutions de (E_H) ont déjà été déterminées à la question précédente.
Il reste donc à déterminer $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de (E) : cherchons $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière y_1 de (E) sous la forme $x \mapsto y_1(x) = ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rlrcl} y_1 \text{ est } \boxed{\text{UNE}} \text{ solution de } (E) & \iff \forall x \in I, & y_1''(x) + 4y_1'(x) + 4y_1(x) & = & 8x + 20 \\ & \iff \forall x \in I, & 0 + 4(a) + 4(ax + b) & = & 8x + 20 \\ & \iff \forall x \in I, & 0 + (4a)x + (4a + 4b) & = & 8x + 20 \end{array}$$

En particulier, si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4a & = & 8 \\ 4a + 4b & = & 20 \end{array} \right. \quad \text{i.e. si} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 3 \end{array} \right.$$

alors y_1 est bien une solution de (E). $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de l'équation (E) est la fonction y_1 définie par :

$$\boxed{y_1 : \left| \begin{array}{ccc} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_1(x) = 2x + 3. \end{array} \right.}$$

(b) L'ensemble $\mathscr{S}$ de $\boxed{\text{TOUTES}}$ les solutions de (E) est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_H(x) + y_1(x) = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x + 3 \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3. Soit y l'unique solution du problème de Cauchy donné. Puisque $y \in \mathscr{S}$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x + 3$. Comme $y(0) = \lambda + 3$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = (-2\mu x - 2\lambda + \mu)e^{-2x} + 2$, on détermine $\boxed{\text{L'UNIQUE}}$ solution au problème de Cauchy posé en résolvant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + 3 & = & 0 \\ -2\lambda + \mu + 2 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -3 \\ \mu & = & -8. \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{L'UNIQUE}}$ solution au problème de Cauchy posé est la fonction y définie par :

$$\boxed{y : \left| \begin{array}{ccc} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_1(x) = -(8x + 3)e^{-2x} + 2x + 3. \end{array} \right.}$$

Partie II - Cas où $f(x) = -3\cos(2x)$

4. On a $\mathrm{e}^{i2x} = K\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $K = 1$ et $m = 2i$ des constantes. Or $m = 2i$ n'est pas racine de (E_C), donc on peut chercher une solution particulière z_2 de $(\tilde{E})$ sous la forme $z_2(x) = a_0\,\mathrm{e}^{2ix}$ avec a_0 une constante à déterminer. Calculons pour tout $x \in I = \mathbb{R}$ (car $x \longmapsto \mathrm{e}^{i2x}$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$) :

$$z_2(x) = a_0\,\mathrm{e}^{2ix} \qquad z_2'(x) = 2ia_0\,\mathrm{e}^{2ix} \qquad z_2''(x) = -4a_0\,\mathrm{e}^{2ix}\,.$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z_2 \text{ est } \boxed{\text{UNE}} \text{ solution de } (\tilde{E}) &\iff \forall x \in I,\quad z_2''(x) + 4z_2'(x) + 4z_2(x) = \mathrm{e}^{2ix} \\ &\iff \forall x \in I,\quad 8ia_0\,\mathrm{e}^{2ix} = \mathrm{e}^{2ix}\,. \end{aligned}$$

L'exponentielle ne s'annulant jamais, les assertions précédentes sont encore équivalentes à

$$8ia_0 = 1 \iff a_0 = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}.$$

$\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de l'équation $(\tilde{E})$ est la fonction z_2 définie par :

$$\boxed{z_2 : \left| \begin{array}{ccl} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & z_2(x) = -\dfrac{i}{8}e^{2ix}. \end{array} \right.}$$

5. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-3\cos(2x) = -3\mathscr{R}\mathrm{e}(\mathrm{e}^{i2x})$, il vient par corollaire du principe de superposition que la fonction $y_2 = -3\mathscr{R}\mathrm{e}(z_2)$ est $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de (E) :

$$\boxed{y_2 : \left| \begin{array}{ccl} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_2(x) = -3\mathscr{R}\mathrm{e}\left(-\dfrac{i}{8}e^{2ix}\right) = -\dfrac{3}{8}\sin(2x). \end{array} \right.}$$

6. On en déduit que l'ensemble de $\boxed{\text{TOUTES}}$ les fonctions solutions de (E) est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccl} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_H(x) + y_2(x) = (\lambda + \mu x)e^{-2x} - \dfrac{3}{8}\sin(2x) \end{array} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie III - Cas où $f(x) = \frac{3}{2} + 2x + 3\cos^2 x$

7. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, & \frac{3}{2} + 2x + 3\cos^2 x &= \alpha(8x + 20) + \beta(-3\cos(2x)) + \gamma \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, & \frac{3}{2} + 2x + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) &= \alpha(8x + 20) + \beta(-3\cos(2x)) + \gamma \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, & (3) + (2)x + \left(\frac{3}{2}\right)\cos(2x) &= (20\alpha + \gamma) + (8\alpha)x + (-3\beta)\cos(2x). \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 20\alpha + \gamma &=& 3 \\ 8\alpha &=& 2 \\ -3\beta &=& \dfrac{3}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \gamma &=& -2 \\ \alpha &=& \dfrac{1}{4} \\ \beta &=& -\dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Conclusion : } (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -2\right).}$

8. Résumons la situation :

> $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de l'équation $y'' + 4y' + 4y = \underbrace{8x + 20}_{f_1(x)}$ est $y_1 : x \longmapsto 2x + 3$.
>
> $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de l'équation $y'' + 4y' + 4y = \underbrace{-3\cos(2x)}_{f_2(x)}$ est $y_2 : x \longmapsto -\dfrac{3}{8}\sin(2x)$.
>
> $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de l'équation $y'' + 4y' + 4y = \underbrace{1}_{f_0(x)}$ est $y_0 : x \longmapsto \dfrac{1}{4}$.

D'après le principe de superposition, $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière y_3 de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{4}\underbrace{(8x+20)}_{f_1(x)} - \frac{1}{2}\underbrace{(-3\cos(2x))}_{f_2(x)} - 2\underbrace{(1)}_{f_0(x)}$$

est la fonction $y_3 = \dfrac{1}{4}y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 - 2y_0$. Après simplifications, il vient que :

$$\boxed{y_3 : \left| \begin{array}{ccl} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{4}(2x+1) + \dfrac{3}{16}\sin(2x). \end{array} \right.}$$

9. On en déduit que l'ensemble de $\boxed{\text{TOUTES}}$ les solutions de l'équation (E) est :

$$\boxed{y : \left| \begin{array}{ccl} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_H(x) + y_p(x) \\ & & = (\lambda + \mu x)e^{-2x} + \dfrac{1}{4}(2x+1) + \dfrac{3}{16}\sin(2x), \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right.}$$

Fin de l'épreuve