Épreuve de Mathématiques 5 - Partie I
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 2h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème – Autour d'une fonction

On considère la fonction f définie par l'expression suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Dans tout le sujet, la notation $DL_p(a)$, où $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, signifie développement limité à l'ordre p en a.

La partie II dépend de la partie I. Les autres sont totalement indépendantes.

Préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Retrouver alors le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction $x \mapsto \arctan x$.

Partie I - Études locales en 0 et en $+\infty$

3. Montrer que la fonction f est continue en 0.
4. Montrer que la fonction f est dérivable en 0.
5. Étudier la parité de la fonction f, puis en déduire une restriction de son ensemble d'étude. *Justifier avec soin.*
6. *Étude locale au voisinage de* 0
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}$$
   où $\varepsilon(x)$ désigne le signe de x.
   (b) En déduire un $DL_6(0)$ de la fonction $x \mapsto f(x) - \varepsilon(x)\dfrac{\pi}{2}x^2$, puis un équivalent de f en 0.
   (c) En déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 0, puis étudier leur position relative au voisinage de 0.
7. *Étude locale au voisinage de* $+\infty$
   (a) Déterminer un développement limité de la fonction f à la précision $\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
   (b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ (dont on précisera l'équation), puis leur position relative au voisinage de $+\infty$.
   (c) Sans aucun calcul, préciser le comportement asymptotique (présence ou non d'une asymptote, position relative) de la fonction f au voisinage de $-\infty$.
   (d) Montrer que :
   $$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \arctan x < x,$$
   puis en déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Étude des variations et de la bijection réciproque

Dans cette partie, on pourra utiliser à bon escient les résultats établis ou admis en partie I.

8. Déterminer les valeurs de $f(1)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$ et $f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.
9. (a) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

   (b) Montrer que :
$$\forall y \in]0,+\infty[, \quad \frac{y}{1+y^2} < 2\arctan y$$

   (c) En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
10. Tracer avec soin le graphe de la fonction f.
On complétera l'annexe, en faisant figurer les informations dont on dispose (asymptotes, tangentes entre autres).
11. Justifier avec soin que la fonction f est bijective, puis tracer sur l'annexe la courbe représentative $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de la bijection réciproque de la fonction f.
12. *Étude locale au voisinage de $+\infty$ de la bijection réciproque*
On admet qu'il existe des coefficients réels a_0, a_1, b_1, b_2 tels que :
$$f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

   (a) Déterminer un développement limité de la fonction $\frac{1}{f}$ à la précision $\underset{+\infty}{\circ}(\frac{1}{x^2})$.

   (b) Sachant que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en utilisant la question précédente, déterminer les coefficients a_1, a_0, b_1 et b_2 recherchés.

   (c) Les coefficients trouvés sont-ils compatibles avec le tracé de $\mathscr{C}_{f^{-1}}$?

   (d) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? *Justifier avec soin.*

$$(i)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b_1}{x} \qquad (ii)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} a_1 x \qquad (iii)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} a_1 x - \frac{50 b_1^2}{x}$$

Partie III - Étude d'une asymptote

On considère la fonction g définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ par l'expression :
$$g(x) = x\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x$$

13. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g.
14. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 3 de la fonction arctan, déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g en $+\infty$.

Partie IV - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in]0,+\infty[$:
$$4xf\left(\frac{1}{2x}\right) + 9xf\left(\frac{1}{3x}\right) = \frac{\pi}{4x}. \tag{E}$$

15. Expliciter l'équation (E) à résoudre.
16. Résoudre (E) en justifiant avec soin.

FIN DE L'ÉPREUVE

Épreuve de Mathématiques 5 - Partie II
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 2h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 – Problème de raccord

On considère l'équation différentielle suivante

$$xy' + (2x+1)y = x^2 \mathrm{e}^{-x}. \tag{E}$$

Les parties I et II sont très majoritairement indépendantes.

Partie I - Comportement en 0

Dans cette partie, on souhaite apporter des informations sur y une solution de (E), sans résoudre (E) (ce qui sera l'objet de la partie II). On suppose dans cette partie que y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $y(0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Justifier que y admet un développement limité en 0 à l'ordre n, on le notera
   $$y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$
   où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer proprement un développement limité de y' en 0 à **l'ordre $\boldsymbol{n}$** à l'aide des coefficients a_k.
   (c) Déterminer a_0.
3. En utilisant le fait que y est une solution de (E) et un développement limité de $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$, déterminer les coefficients a_1 et a_2.
4. (a) En déduire $y'(0)$ et $y''(0)$.
   (b) Déterminer un équivalent de y en 0.
   (c) Justifier que le point $(0; y(0))$ est un minimum local de la fonction y.

Partie II - Résolution de l'équation différentielle

7. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]0;+\infty[$.
8. Soit $x > 0$. Calculer
   $$I(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$
9. Déterminer $\mathscr{S}_+$ l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;+\infty[$.

On admet que $\mathscr{S}_-$ l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty;0[$ est donné par

$$\mathscr{S}_- = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x}+A\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \right. \middle| \; A \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Soit $A \in \mathbb{R}$, calculer suivant les valeurs de A, la limite suivante :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$
2. En déduire proprement qu'il existe au plus une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, noté y_1 et donner une expression de $y_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer un équivalent de $x \mapsto xy_1(x)$ en 0.
4. En déduire un développement limité de y_1, puis que y_1 est dérivable en 0.
5. En conclure l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Problème 2 – Système d'équations différentielles

L'objectif de ce problème est de résoudre un système d'équations différentielles.

Définition 1

Soient x, y et z trois fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On dit que X est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si x, y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$, on note alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

Définition 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. On dit que X est solution de l'équation $X' = AX$ si et seulement si x, y et z sont dérivables et solutions du système d'équations différentielles

$$\mathcal{S} : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = a_1 x(t) + b_1 y(t) + c_1 z(t) \\ y'(t) = a_2 x(t) + b_2 y(t) + c_2 z(t) \\ z'(t) = a_3 x(t) + b_3 y(t) + c_3 z(t) \end{cases}$$

Soient x, y et z trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On souhaite résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\mathcal{S}_0 : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) - x(t) + z(t) = 0 \\ y'(t) - x(t) - y(t) - z(t) = 0 \\ z'(t) + x(t) + y(t) - z(t) = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que le triplet de fonctions (x, y, z) données pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $x(t) = \mathrm{e}^{2t}$, $y(t) = 0$ et $z(t) = -\mathrm{e}^{2t}$ est une solution du système $\mathcal{S}_0$.

On cherche maintenant à déterminer toutes les solutions de $\mathcal{S}_0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{S}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t).$$

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse.

4. On pose $B = P^{-1}AP$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t) = P^{-1}X(t)$ et $U'(t) = P^{-1}X'(t)$. Montrer que

$$\mathcal{S}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t).$$

5. Calculer la matrice B.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ les coordonnées de U. On admet que u, v et w sont dérivables sur $\mathbb{R}$ si et seulement si x, y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}.$$

6. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -w(t) \\ v''(t) - v'(t) + v(t) = 0 \end{cases}$$

7. (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $u' = 2u$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $v'' - v' + v = 0$.
   (c) Donner alors les solutions U du système différentiel $U' = BU$.
8. En déduire les solutions X de $\mathcal{S}_0$.

Fin de l'épreuve