Épreuve de Mathématiques 5 - Corrigé
2018-2019

Partie I

Problème – Autour d'une fonction

Préliminaires

1. On a les égalités suivantes :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Ainsi, $\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})}$

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ étant continue, on peut intégrer terme à terme et on en déduit alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} \lambda + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Or $\arctan(0) = 0$, ce qui permet d'en déduire que $\lambda = 0$.

Ainsi, $\boxed{\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).}$

Partie I - Études locales en 0 et en $+\infty$

3. Montrons que la fonction f est continue en 0 i.e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ i.e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que $\arctan(\frac{1}{x}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x^2 \geqslant 0$, on a l'encadrement suivant :

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2}x^2}_{\underset{x\to 0}{\to} 0} \leqslant f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2}x^2}_{\underset{x\to 0}{\to} 0}$$

Par le théorème des gendarmes, il vient que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

4. Montrons que la fonction f est dérivable en 0 i.e. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et est finie.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que $\arctan(\frac{1}{x}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, on a l'encadrement suivant :

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2}|x|}_{\underset{x\to 0}{\to} 0} \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2}|x|}_{\underset{x\to 0}{\to} 0}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$

5. Montrons que f est impaire i.e. $\left\{\begin{array}{lll} \forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f & (i) & \checkmark \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) & (ii) & \end{array}\right.$.

$\boxed{(ii)}$ Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que la fonction arctan est impaire, on a les égalités entre réels suivantes :

$$f(-x) = (-x)^2 \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = -f(x)$$

De plus $f(0) = 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$, et sa courbe représentative est alors symétrique par rapport à l'origine.

$\boxed{\text{On peut alors restreindre son étude à l'ensemble } \mathbb{R}_*^+ \text{ par exemple.}}$

6. *Étude locale au voisinage de* 0
   (a) Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \underbrace{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{h(x)} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_*^+ \quad (i) \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_*^- \quad (ii) \end{cases}$$

$\boxed{(i)}$ La fonction h ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Sachant qu'une fonction nulle sur un intervalle y est constante, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \lambda$$

C'est en particulier vrai pour $x = 1 > 0$, ce qui permet de trouver :

$$h(1) = \lambda \iff \arctan(1) + \arctan(1) = \lambda \iff \lambda = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, on a bien montré que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{(ii)}$ On remarque que la fonction h introduite est impaire, ce qui permet d'en déduire :

$$\forall x < 0, \quad h(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 &= x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 = x^2\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}\right) \\ &\underset{6a)}{=} -x^2 \arctan x \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f(x) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^2\arctan x &\underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^2\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - \underbrace{x^3 + \frac{x^5}{3} + o(x^6)}_{=o(x^2)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - \underbrace{x^3 + \frac{x^5}{3} + o(x^6)}_{=o(x^2)}}$.

On en déduit alors l'équivalence suivante :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 + o(x^2) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2.$$

Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2.}$

(c) D'après la question précédente :

$$f(x) - [ax+b] \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 \qquad \text{avec } a = b = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation de la tangente } \mathcal{T}_0 \text{ est } y = 0.}$
Sachant que l'équivalent est strictement positif si et seulement si $x > 0$, on en déduit qu'au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{T}_0$ à gauche de 0 et lui est au-dessus à droite de 0.

7. *Étude locale au voisinage de $+\infty$*

(a) Puisque $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$.

(b) D'après la question précédente :

$$f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3x} < 0 \quad \text{(au voisinage de } +\infty)$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote oblique en } +\infty \text{ d'équation } y = x}$. Sachant que $-\frac{1}{3x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$

(c) La fonction f étant impaire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote oblique en } -\infty \text{ d'équation } y = x}$,
et $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de son asymptote au voisinage de } -\infty.}$

(d) Montrons que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 < \underbrace{x - \arctan x}_{=a(x)}$$

La fonction a ainsi définie est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \quad a'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$$

On en déduit alors que a est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et sachant de plus que $\lim\limits_{x\to 0} a(x) = 0$, il vient que a est strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, $\boxed{\text{on a bien montré que pour tout } x \in]0, +\infty[, \arctan x < x. \ (\bigstar)}$.

La variable x étant muette,

$$(\bigstar) \Longleftrightarrow \forall y \in]0, +\infty[, \ \arctan y < y$$

Soit $x \in]0,+\infty[$. Alors l'inégalité (★) étant vraie pour tout $y \in]0,+\infty[$, elle est en particulier vraie pour $y = \frac{1}{x} \underset{\text{ok!}}{>} 0$, ce qui permet d'en déduire que :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \underset{x^2>0}{\iff} x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < x \iff f(x) < x$$

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est strictement en-dessous de son asymptote sur $\mathbb{R}_*^+$, et par imparité est strictement au-dessus sur $\mathbb{R}_*^-$ et les deux courbes s'intersectent au point d'abscisse $x = 0$.

Partie II - Étude des variations et de la bijection réciproque

8. Après calculs, $\boxed{f(1) = \frac{\pi}{4},\ f(-1) \underset{\text{imparité}}{=} -f(1) = -\frac{\pi}{4},\ f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{9}}$.
9. (a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ par opérations élémentaires, et :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}}$.

(b) Montrons que :

$$\forall y \in]0,+\infty[, \quad 0 < \underbrace{2\arctan y - \frac{y}{1+y^2}}_{b(y)}$$

La fonction b ainsi définie est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall y \in]0,+\infty[, \quad b'(y) = \frac{2}{1+y^2} - \frac{(1+y^2)\times 1 - 2y\times y}{(1+y^2)^2} = \frac{3y^2+1}{(1+y^2)^2} > 0$$

Ainsi, la fonction b est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{y\to 0} b(y) = 0$, donc b est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } y \in]0,+\infty[, \quad \frac{y}{1+y^2} < 2\arctan y. \quad (\bigstar\bigstar)}$

(c) Commençons par étudier le signe de la dérivée de f.
Soit $x \in]0,+\infty[$. L'inégalité (★★) étant vraie pour tout $y \in]0,+\infty[$, elle est en particulier vraie pour $y = \frac{1}{x} \underset{\text{ok!}}{\in}]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} < 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \iff \frac{x}{1+x^2} < 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x>0}{\iff} \frac{x^2}{1+x^2} < 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) > 0$.
Remarque : f' est paire, donc on pourrait même conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$.
On en déduit les tableaux de signes et variations suivants :

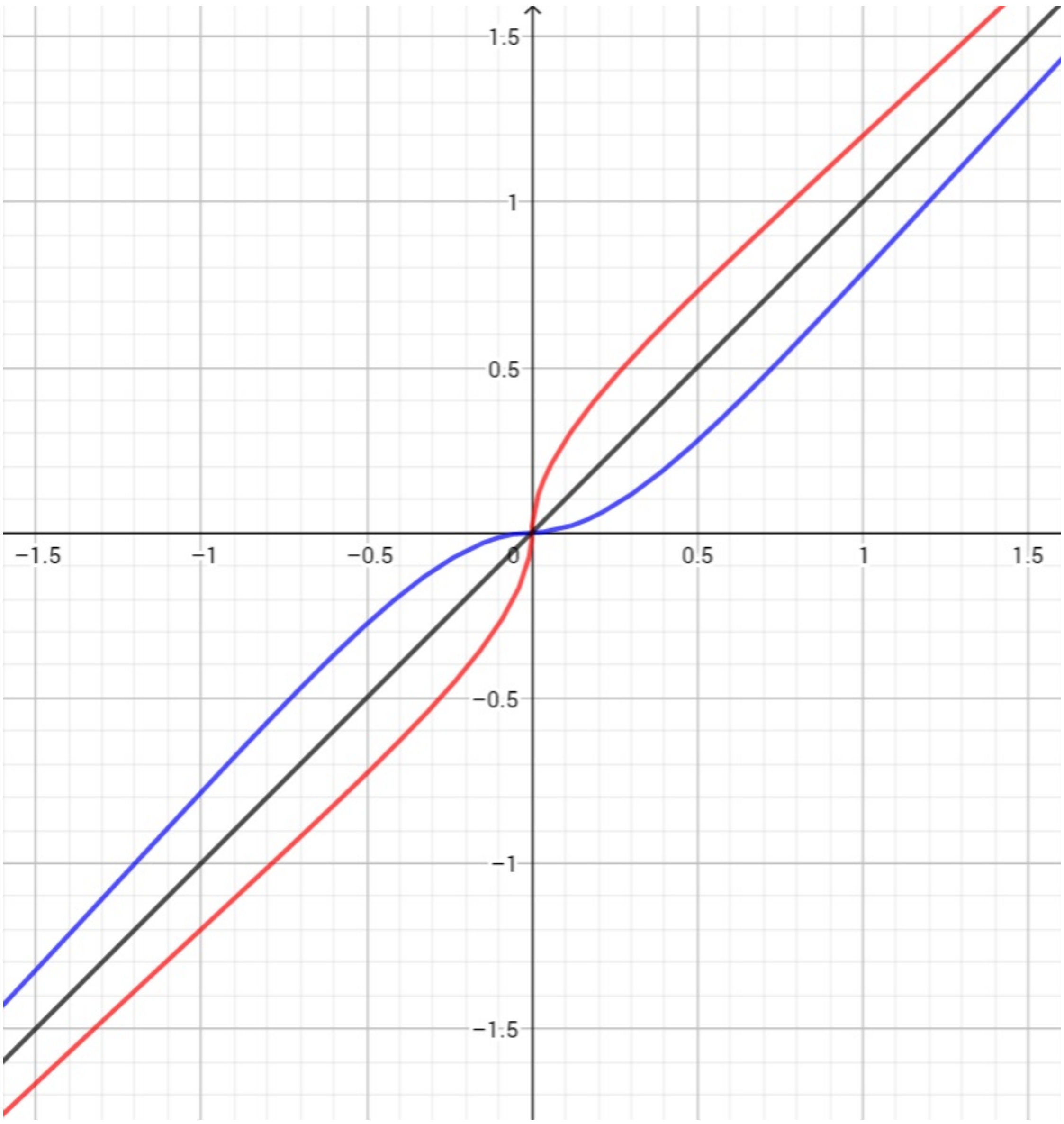
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

Concernant les limites, rappelons que d'après 7a) :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$$

ce qui permet d'en déduire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La limite en $-\infty$ s'en déduit par imparité de la fonction f.

10. Cf question suivante.
11. La fonction f est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ et y est strictement croissante, donc réalise une bijection de I vers $f(I) = \mathbb{R}$. Ainsi, la bijection réciproque f^{-1} existe et sa courbe représentative $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ **(en rouge)** s'obtient par symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ **(en bleu)** par rapport à la droite d'équation $y = x$ **(en noir)**.



12. (a) Montrons que f^{-1} est impaire. L'ensemble de définition de f^{-1} qui est $\mathbb{R}$ est bien centré en 0. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = f^{-1}(y)$ i.e. $f(x) = y$. On a alors les égalités suivantes entre réels :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) &= f^{-1}(f(-x)) \qquad \text{car } f \text{ est impaire d'après la question 5.} \\ &= -x \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Par conséquent, la fonction } f^{-1} \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}$

(b) Cette question est une arnaque et est fausse en général. Rappelons que l'annulation des coefficients des monômes de degré pair d'une fonction impaire n'est valide QUE pour un développement limité en 0. Pour vous convaincre qu'en $+\infty$ par exemple cette propriété tombe en défaut. On sait que la fonction arctangente est impaire pourtant son coefficient « a_0 » dans son développement limité en $+\infty$ n'est pas nul :

$$\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Nous n'en déduisons donc rien du tout de (a).

(c) D'après la question 7.(a), on a

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'égalité asymptotique entre fonctions suivantes :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\frac{1}{1 + o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Or, $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o\,(u)$. Posons $u \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. On a alors $o\,(u) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc, on a les égalités asymptotiques entre fonctions suivantes :

$$\boxed{\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).}$$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = f(x)$. D'après la question 7, on sait que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et que donc notamment $y = f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, on a les égalités asymptotiques entre fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} x = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(y) &\underset{x\to+\infty}{=} a_1 y + a_0 + \frac{b_1}{y} + \frac{b_2}{y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} a_1 y + a_0 + \frac{b_1}{f(x)} + \frac{b_2}{f(x)^2} + o\left(\frac{1}{f(x)^2}\right). \end{aligned}$$

Or nous avons vu que $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ dont on déduit également que $\frac{1}{f(x)^2} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $o\left(\frac{1}{f(x)^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. D'où,

$$x \underset{x\to+\infty}{=} a_1 f(x) + a_0 + b_1\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + b_2\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En utilisant la question 7.(a), on obtient alors

$$\begin{aligned} x &\underset{x\to+\infty}{=} a_1\left(x - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} a_1 x + a_0 - \frac{b_1 - 3a_1}{3x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit

$$(a_1 - 1)\,x + a_0 - \frac{b_1 - 3a_1}{3x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 0.$$

ce qui n'est possible que si $a_1 - 1 = a_0 = b_1 - 3a_1 = b_2 = 0$ (sinon on obtient 0 équivalent à un terme non nul ce que l'on sait faux bien entendu). Par conséquent

$$\boxed{a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad b_1 = 3a_1 = 3, \qquad b_2 = 0.}$$

(ce qui démontre a posteriori la question 12.(b)). On conclut que

$$\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).}$$

(e) On retrouve bien d'une part que $\mathscr{C}_f^{-1}$ admet la droite $y = x$ pour asymptote oblique en $+\infty$ (et donc en $-\infty$ par imparité, question 12.(a)). D'autre part puisque

$$f^{-1}(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x}.$$

et que $\frac{3}{x} > 0$ si et seulement si $x > 0$, on retrouve également le fait que $\mathscr{C}_f^{-1}$ est asymptotiquement au-dessus de la droite $y = x$ en $+\infty$ et asymptotiquement en-dessous de la droite $y = x$ en $-\infty$.

(f) (i) On a $\frac{b_1}{x} = \frac{3}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ et $f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Donc $\frac{b_1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f^{-1}(x)\right)$ et donc $\boxed{f^{-1}(x) \text{ n'est pas équivalent à } \frac{b_1}{x} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty}$.

(ii) De la question 12.(d), et du fait que $o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{3}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} x = a_1x$, on en déduit directement que $\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_1x}$.

(iii) Puisque $\frac{50b_1^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} a_1x = x$, on en déduit que $\boxed{a_1x + \frac{50b_1^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} a_1x \underset{x\to+\infty}{\sim} f^{-1}(x)}$, d'après le point *(ii)*.

<u>Partie III - Étude d'une asymptote</u>

13. Par définition, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g(x) = x\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors les équivalences suivantes :

$$x \in \mathscr{D}_g \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x \in \mathscr{D}_f \\ x \neq 0 \\ \frac{f(x)}{x} > 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}.$$

Or pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ et pour tout $x < 0$, $f(x) < 0$ d'après la question 9.(c). On en déduit donc que $\boxed{\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^*}$.

14. D'après la question 2, on a

$$\arctan(u) \underset{x\to+\infty}{=} u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(x) = x\mathrm{e}^{x\ln\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} &\underset{x\to+\infty}{=} x\mathrm{e}^{x\ln\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\mathrm{e}^{x\ln\left(1-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Posons $u \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $o(u) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$. Donc

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\mathrm{e}^{x\left(-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{=} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Posons $v \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De même que précédemment, on a $o(v) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. De plus $\mathrm{e}^v \underset{v\to 0}{=} 1 + v + o(v)$. Donc,

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3} + o(1).$$

$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{C}_g \text{ possède une asymptote oblique en } +\infty \text{ d'équation } y = x - \tfrac{1}{3}.}$

Partie IV - Résolution d'une équation

15. Soit $x \in]0;+\infty[$, par définition de f, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad 4x\left(\frac{1}{(2x)^2}\arctan(2x)\right) + 9x\left(\frac{1}{(3x)^2}\arctan(3x)\right) = \frac{\pi}{4x}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}\arctan(2x) + \frac{1}{x}\arctan(3x) = \frac{\pi}{4x}\\
&\boxed{(E) \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}} \qquad \text{car } x \neq 0.
\end{aligned}$$

16. Soit $x \in]0;+\infty[$, puisque $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on peut composer l'équation (E) par la fonction tangente :

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan\left(\arctan(2x) + \arctan(3x)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $\arctan(2x) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(3x) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc on peut utiliser la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ et le fait que $\tan(\arctan(u)) = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\tan(\arctan(2x))+\tan(\arctan(3x))}{1-\tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(3x))} = 1\\ \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2x+3x}{1-6x^2} = 1\\ \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = 1 - 6x^2\\ 1 - 6x^2 \neq 0\\ \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x^2 + 5x - 1 = 0\\ x^2 \neq \frac{1}{6}.\\ \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à $6x^2 + 5x - 1$, on a

$$\Delta = 25 + 26 = 49 = 7^2 > 0.$$

Alors les racines sont

$$x = \frac{-5-7}{12} = -1 \quad \text{OU} \quad x = \frac{-5+7}{12} = \frac{1}{6}.$$

Puisque $x > 0$, il va de soi que $x \neq -1$. Donc $x = \frac{1}{6}$ est l'unique racine possible. Dans ce cas, on a bien $x^2 \neq \frac{1}{6}$, et $2x = \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ainsi que $3x = \frac{1}{2} < 1$ Par conséquent, on a bien $0 < \arctan(2x) + \arctan(3x) < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Conclusion, } x = \frac{1}{6} \text{ est l'unique solution de } (E).}$

Partie II

Problème 1 – Problème de raccord

On considère l'équation différentielle suivante

$$xy' + (2x+1)y = x^2 \mathrm{e}^{-x}. \tag{E}$$

Partie I - Comportement en 0

1. En évaluant (E) en 0, on obtient $0 + y(0) = 0$ et donc $\boxed{y(0) = 0}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Par hypothèse, la fonction y est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ donc par une propriété du cours, on sait que $\boxed{y \text{ admet un développement limité à tout ordre}}$ (et par la formule de Taylor-Young, on sait que $a_k = y^{(k)}(0)/k!$).
   (b) Puisque y est $\mathscr{C}^\infty$, on sait de même que y' est $\mathscr{C}^\infty$ et donc y' admet également un développement limité à l'ordre de n. On peut donc appliquer la dérivation du développement à l'ordre $n+1$ de y pour obtenir que

$$y'(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)\,a_{n+1}x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\boxed{y'(x) \underset{x\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,a_{k+1}x^k + o\left(x^n\right).}$$

   (c) Par la formule de Taylor-Young à l'ordre 0, on sait que $a_0 = y(0)$. Donc d'après la question 1, $\boxed{a_0 = 0}$.
3. On sait que $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + o\left(1\right)$ donc $x^2\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^2\right)$. Or d'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} y(x) &\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} a_1x + a_2x^2 + o\left(x^2\right) \\ y'(x) &\underset{x\to 0}{=} a_1 + 2a_2x + o\left(x\right). \end{aligned}$$

Donc en injectant ces égalités asymptotiques dans (E),

$$\begin{aligned} & x\left(a_1 + 2a_2x + o\left(x\right)\right) + (2x+1)\left(a_1x + a_2x^2 + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^2\right) \\ \Leftrightarrow\quad & 2a_1x + \left(2a_1 + 3a_2\right)x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a $2a_1 = 0$ i.e. $a_1 = 0$ et $2a_1 + 3a_2 = 3a_2 = 1$ et donc $a_2 = \frac{1}{3}$. Conclusion

$$\boxed{a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2 = \frac{1}{3}.}$$

4. (a) On sait que $a_1 = y'(0)$ et $a_2 = \frac{y''(0)}{2}$. Donc, directement, $\boxed{y'(0) = 0 \text{ et } y''(0) = \frac{2}{3}}$.

(b) Avec les valeurs déterminer dans les questions précédentes, $y(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{2}{3}x^2 + o\left(x^2\right)$ et donc

$$y(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{3}x^2.$$

(c) De la question précédente, on en déduit que $y(x)$ est de même signe que $\frac{2}{3}x^2$ lorsque x est au voisinage de 0. Ainsi pour tout x proche de 0, $y(x) \geqslant 0 = y(0)$ et donc $\boxed{\text{le point } (0; y(0)) \text{ est un minimum local de la fonction } y}$.

Partie II - Résolution de l'équation différentielle

7. Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E). Soit $y \in \mathscr{F}(]0;+\infty[;\mathbb{R})$. Puisque x est non nul sur $]0;+\infty[$, on a

$$y \text{ est une solution de } (E_0) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x > 0, \quad y'(x) + \frac{2x+1}{x}y(x) = 0.$$

La fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet notamment pour primitive $x \mapsto 2x + \ln(x)$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{-2x-\ln(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}$. Donc l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_0^+ = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \right).}$$

8. Soit $x > 0$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = t^2 \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;x]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v'(t) = 2t \end{cases}$. Donc par intégration par parties,

$$I(x) = \int_0^x t^2\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[t^2\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x 2t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = x^2\mathrm{e}^x - 2\int_0^x t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

A nouveau par une intégration par parties en posant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$ deux fonctions qui sont bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on obtient,

$$I(x) = x^2\mathrm{e}^x - 2\left[t\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} + 2\int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{I(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^x - 2.}$$

9. Soient $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ puis $y_0 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $y_0(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} > 0$ et $z(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$. On note que y_0 est un élément de $\mathscr{S}_0^+$ et que y est dérivable si et seulement si z est dérivable. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est une solution (E)} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xz'(x)y_0(x) + xz(x)y_0'(x) + (2x+1)\,z(x)y_0(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xz'(x)y_0(x) + z(x)\underbrace{\left(xy_0'(x) + (2x+1)\,y_0(x)\right)}_{=0 \quad \text{car } y_0 \in \mathscr{S}_0^+} = x^2\mathrm{e}^{-x} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)\mathrm{e}^{-2x} = x^2\mathrm{e}^{-x} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = x^2\mathrm{e}^{x}.
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet donc des primitives sur cet intervalle. De plus d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
y \text{ est une solution (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x + C \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \left(\left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x + C\right) \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x} \mathrm{e}^{-x} + C \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_+ = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{ccc}]0; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-2x+2}{x}\mathrm{e}^{-x} + C\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \right. \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

On admet que $\mathscr{S}_-$ l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty; 0[$ est donné par

$$\mathscr{S}_- = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty; 0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \right. \middle| \; A \in \mathbb{R} \right\}.$$

10. Soit $A \in \mathbb{R}$. On a les égalités asymptotiques suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{(2 - 2x + x^2)\, \mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x}}{x} &\underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{=} \frac{(2 - 2x + o(x))\,(1 - x + o(x)) + A\,(1 - 2x + o(x))}{x} \\
&\underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{=} \frac{2 - 2x - 2x + o(x) + A - 2Ax + o(x)}{x} \\
&\underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{=} \frac{2 + A}{x} - (4 + 2A) + o(1).
\end{aligned}$$

Si $A < -2$, alors $2 + A < 0$ et donc

$$\frac{(2 - 2x + x^2)\, \mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x}}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{\sim} \frac{2 + A}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

De même, si $A > -2$, alors $2 + A > 0$ et donc

$$\frac{(2 - 2x + x^2)\, \mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x}}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{\sim} \frac{2 + A}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Enfin, si $A = -2$, alors

$$\frac{(2 - 2x + x^2)\, \mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x}}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{=} o(1) \underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion, on a

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{(2 - 2x + x^2)\, \mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x}}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } A < -2 \\ 0 & \text{si } A = -2 \\ -\infty & \text{si } A > -2. \end{cases}}$$

11. Soit y_1 une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors y_1 est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et donc il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y_1(x) = \frac{(2 - 2x + x^2)\, \mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

De plus, y_1 est aussi une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $B \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y_1(x) = \frac{\left(2 - 2x + x^2\right) \mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

On sait également par définition que y_1 est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$. Notamment admet une limite à gauche finie en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} y_1(x) = y_1(0) = 0 \qquad \text{d'après la question 1.}$$

Or d'après la question précédente, cette limite n'est finie que si $A = -2$. On en déduit donc que $A = -2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $y_1(x) = \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}}{x}$.
Exactement de la même façon, on montre que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} y_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } B = -2 \\ \pm\infty & \text{si } B \neq -2. \end{cases}$$

dont on déduit que $B = -2$.
Les deux constantes étant fixées, on en déduit que $\boxed{\text{si } y_1 \text{ existe, elle est nécessairement unique}}$ et vaut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_1(x) = \begin{cases} \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

12. On a pour tout $x \neq 0$, $xy_1(x) = \left(2 - 2x + x^2\right) \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}$ et l'on note que cette formule reste vraie si $x = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
xy_1(x) &\underset{x \to 0}{=} \left(2 - 2x + x^2\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^2\right)\right) - 2\left(1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \begin{array}{ccccc} 2 & -2x & +x^2 & -\frac{x^3}{3} & +o\left(x^3\right) \\ & -2x & +2x^2 & -x^3 & +o\left(x^3\right) \\ & & +x^2 & -x^3 & +o\left(x^3\right) \\ -2 & +4x & -4x^2 & +\frac{8x^3}{3} & +o\left(x^3\right) \end{array} \\
&\underset{x \to 0}{=} \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{xy_1(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}.}$$

13. De la question précédente, on en déduit que $y_1(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)$. Notamment, y_1 admet un développement limité à l'ordre 1 donné par $\boxed{y_1(x) \underset{x \to 0}{=} 0 + o\left(x^1\right)}$.

Par conséquent, $\boxed{y_1 \text{ est dérivable en 0 et on a } y_1(0) = y_1'(0) = 0}$.

14. Des questions précédentes, on en déduit que y_1 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et aussi en 0. Donc y_1 est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$. L'équation (E) admet donc pour unique solution

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_1(x) = \begin{cases} \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

Problème 2 – Système d'équations différentielles

Soient x, y et z trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On souhaite résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\mathcal{S}_0 : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) - x(t) + z(t) = 0 \\ y'(t) - x(t) - y(t) - z(t) = 0 \\ z'(t) + x(t) + y(t) - z(t) = 0 \end{cases}$$

1. Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x(t) = \mathrm{e}^{2t}$, $y(t) = 0$ et $z(t) = -\mathrm{e}^{2t}$, alors on sait que ces trois fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$, $y'(0) = 0$ et $z'(t) = -2\mathrm{e}^{2t}$. Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) - x(t) + z(t) = 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{2t} = 0 \\ y'(t) - x(t) - y(t) - z(t) = 0 - \mathrm{e}^{2t} - 0 + \mathrm{e}^{2t} = 0 \\ z'(t) + x(t) + y(t) - z(t) = -2\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t} + 0 + \mathrm{e}^{2t} = 0 \end{cases}$$

Avec ces définitions, on en déduit bien que $\boxed{(x, y, z) \text{ est une solution de } \mathcal{S}_0}$.

On cherche maintenant à déterminer toutes les solutions de $\mathcal{S}_0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

2. On a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{S}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + z(t) \end{cases}$$

En posant

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}},$$

on obtient alors

$$\mathcal{S}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)}.$$

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule une matrice échelonnée équivalente par les opérations élémentaires suivantes. Puisque l'on aura aussi besoin de son inverse, appliquons les mêmes opérations en parallèle à la matrice I_3 :

$$P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \qquad\qquad I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2. \qquad\qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

On obtient trois pivots et donc $\mathrm{rg}(P) = 3$. Ainsi P est inversible. Poursuivons pour calculer sa réduite :

$$P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \qquad\qquad I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix}. \qquad\qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix}.$$

Il est facile de vérifier si besoin que la matrice obtenue est bien l'inverse en la multipliant par P. Conclusion, $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

4. On pose $B = P^{-1}AP$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t) = P^{-1}X(t)$ et $U'(t) = P^{-1}X'(t)$. On commence par remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$U'(t) = \left(P^{-1}X\right)'(t) = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x+y-z \\ 2x+y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}\right)'(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x'(t)+y'(t)-z'(t) \\ 2x'(t)+y'(t)+2z'(t) \\ -x'(t)+y'(t)-z'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t)$$

qui est une propriété générale du produit de deux matrices lorsque l'une est constante (ne dépend pas de t). Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad P^{-1}X'(t) = BP^{-1}X(t).$$

En multipliant par P, qui est inversible on conserve l'équivalence (et uniquement parce que P est inversible ! sinon la réciproque ne serait pas nécessairement vraie). Donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{PP^{-1}}_{=I_3}X'(t) = \underbrace{PBP^{-1}}_{=A}X(t) \\ &\Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{S}_0.}$$

5. On a les calculs matriciels suivants :

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ les coordonnées de U. On admet que u, v et w sont dérivables sur $\mathbb{R}$ si et seulement si x, y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}.$$

6. D'après la question précédente, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad BU(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u(t) \\ -w(t) \\ v(t) + w(t) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -w(t) \\ w'(t) = v(t) + w(t) \end{cases}.$$

En dérivant la deuxième ligne (car w dérivable implique v dérivable), il vient

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -w(t) \\ v''(t) = -w'(t) = -v(t) - w(t) = -v(t) + v'(t) \\ w'(t) = v(t) + w(t) \end{cases} \\ \Rightarrow \qquad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -w(t) \\ v''(t) - v'(t) + v(t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Réciproquement, si ces égalités sont vraies pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors en dérivant la deuxième ligne,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -w(t) \\ v''(t) = -w'(t) \\ v''(t) - v'(t) + v(t) = 0 \end{cases} \qquad & \Rightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -w(t) \\ v''(t) = -w'(t) \\ -w'(t) + w(t) + v(t) = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -w(t) \\ w'(t) = v(t) + w(t) \end{cases}. \end{aligned}$$

Au bilan,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -w(t) \\ v''(t) - v'(t) + v(t) = 0 \end{cases}.}$$

7. (a) On a $(E_1) : u' = 2u \quad \Leftrightarrow \quad u' - 2u = 0$. On reconnait une équation homogène du premier degré. Notons $\mathscr{S}_1$ son ensemble solution. La fonction $t \mapsto -2$ est continue donc admet des primitives dont l'une est donnée par $t \mapsto -2t$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ae^{2t} \end{array} \;\middle|\; A \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(b) L'équation différentielle $(E_2) : v'' - v' + v = 0$ est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique est donnée par $r^2 - r + 1 = 0$, où $r \in \mathbb{C}$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Les racines complexes de l'équation caractéristique sont alors données par $r = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par conséquent l'ensemble $\mathscr{S}_2$ des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ae^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Be^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{array} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(c) Des questions précédentes, on en déduit les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
& \forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} u \in \mathscr{S}_1 \\ \forall t \in \mathbb{R},\ v'(t) = -w(t) \\ v \in \mathscr{S}_2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\,(A, B, C) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = Ae^{2t} \\ w(t) = -v'(t) \\ v(t) = Be^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Ce^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\,(A, B, C) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \\
& \begin{cases} u(t) = Ae^{2t} \\ w(t) = -\frac{B}{2}e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}Be^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \qquad\quad -\frac{C}{2}e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}Ce^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ v(t) = Be^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Ce^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\begin{aligned}
& \forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = BU(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\,(A, B, C) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \\
& \boxed{U(t) = \begin{pmatrix} Ae^{2t} \\ Be^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Ce^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\left(\frac{B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C\right) e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}B - \frac{C}{2}\right) e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}.}
\end{aligned}$$

8. On déduit des questions précédentes que X est une solution de $\mathcal{S}_0$ si et seulement si $U = P^{-1}X$

est sous la forme exprimée à la question précédente. Ainsi,

$$
\begin{array}{ll}
 & X \text{ solution de } \mathcal{S}_0 \\
\Leftrightarrow & \exists\,(A,B,C)\in\mathbb{R}^3, \forall t\in\mathbb{R}, \quad X(t)=PU(t) \\
\Leftrightarrow & \exists\,(A,B,C)\in\mathbb{R}^3, \forall t\in\mathbb{R}, \\
 & X(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\mathrm{e}^{2t} \\ B\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\left(\frac{B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}C\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}B-\frac{C}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \exists\,(A,B,C)\in\mathbb{R}^3, \forall t\in\mathbb{R}, \\
 & \boxed{X(t)=\begin{pmatrix} A\mathrm{e}^{2t}+\left(\frac{B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}C\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}B-\frac{C}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\sqrt{3}C\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\sqrt{3}B\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -A\mathrm{e}^{2t}+B\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}.}
\end{array}
$$

Fin du corrigé