Épreuve de Mathématiques 6
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit (E_n) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = X^n \qquad \text{et} \qquad P(0) = 0 \qquad\qquad (E_n)$$

On pose également (E) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = 0 \qquad\qquad (E)$$

1. Déterminer avec soin si le polynôme $P = 1$ est une solution d'une des équations (E) ou (E_n), $n \in \mathbb{N}$. Même question pour les polynômes $\frac{X}{2}$ et $\frac{X^2}{2}$.
2. (a) Soit P une solution de (E) telle que $\deg(P) \geqslant 1$. Justifier à l'aide d'un théorème du cours qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
   (b) Montrer alors proprement que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha + 2k$ est aussi une racine de P.
   (c) En déduire l'ensemble de solution de (E).
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (E_n) admet au plus une solution.
4. Soit P une solution de (E_n).
   (a) Déterminer une équation vérifiée par $P^{(n+1)}$.
   (b) En déduire que $\deg(P) \leqslant n+1$.
5. Résoudre (E_1).

Problème 2 - d'après Banque PT 2014

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

et on note f_n la fonction polynomiale associée à P_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent simple de $\exp(x) - f_n(x)$ au voisinage de 0 et discuter suivant la valeur de n la position relative des courbes de exp et f_n au voisinage de 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Etablir une formule donnant P_n' en fonction de P_{n-1} et une relation entre P_n et P_n'.
   (b) En déduire que P_n n'admet que des racines simples.

Partie II

On considère la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0;1], \quad g(x) = x\ln(x).$$

1. On considère également $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \sqrt{|x|}\, g(|x|)$$

   (a) Etudier la continuité de g et de h et sans aucun calcul justifier l'existence de $\sup_{x\in[0;1]} |g(x)|$.

(b) Montrer que h est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$.

(c) La fonction h admet-elle un développement limité d'ordre 1 en 0 ? Si oui le déterminer.

(d) La fonction h est-elle deux fois dérivable ?

2. (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de g.

(b) Dresser le tableau de variations de g' puis celui de g. Tracer l'allure de la courbe de g en annexe. On fera apparaitre les tangentes en 0 et en 1.

(c) En déduire $M = \sup_{x\in\left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]} |g'(x)|$.

On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$ et pour tout entier naturel n

$$t_{n+1} = -g\left(t_n\right).$$

3. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n

$$t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

(b) En déduire que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l.

(c) Déterminer la valeur de l.

4. (a) Montrer que pour tout réel $x \in \left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$,

$$\left|g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \frac{\left|x-\mathrm{e}^{-1}\right|}{2}.$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel

$$\left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|t_0 - \mathrm{e}^{-1}\right|.$$

(c) Retrouver alors le résultat de la question 3.c

Partie III

Dans cette partie, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(t) = \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que R_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!} \qquad\qquad (\mathcal{E})$$

(b) Déterminer $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.

(c) Résoudre $(\mathcal{E})$ dans $\mathbb{R}$ (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).

(d) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(t) = \mathrm{e}^t \int_0^t \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s.$$

2. Montrer que pour tout réel positif t :

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}\,\mathrm{e}^t}{(n+1)!}.$$

3. Dans cette question, on fixe $t \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_n = \frac{t^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang.

(b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

(c) Montrer alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Déduire des questions précédentes la limite suivante
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

On pourra admettre dans la suite que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}\,.$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}\frac{1}{n!}.$$

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones et donner leur sens de variation.
6. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
7. En déduire que pour tout entier naturel non nul,
$$u_q < \mathrm{e} < v_q.$$
8. On souhaite montrer dans cette question que e est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que
$$\mathrm{e} = \frac{p}{q}.$$
   (a) Justifier que $u_q q!$ est un entier naturel.
   (b) En déduire une contradiction et conclure l'irrationalité de e.
9. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$
   (a) Soit ε un réel strictement positif. Justifier qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ puis qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geqslant n_1$ tels que
$$\forall n \geqslant n_1, \quad |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_2, \quad \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1}(u_k - \mathrm{e})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) En déduire que pour tout $n > n_2$,
$$|w_n - \mathrm{e}| \leqslant \varepsilon\,.$$
   (c) Quelle est la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
10. On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$
Déterminer un développement asymptotique de e_n à l'ordre $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$ et préciser la limite de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.