Correction du DS7

Exercice 1 — Projecteur d'un espace vectoriel

Définition. On appelle projecteur d'un espace vectoriel E tout endomorphisme f de E vérifiant :

$$f^2 = f$$

Le but de cet exercice est d'observer, puis d'établir des résultats remarquables sur les projecteurs.
Les parties I et II sont en grande partie indépendantes.

Partie I - Exemple d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$

On considère l'application p et l'ensemble F suivants :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} -x-2y+2z \\ x+2y-z \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; p(u) = u \right\}$$

On note classiquement $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. On a les égalités entre vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} p(\lambda u + \mu v) &= p\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = p\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda x_1 - \mu x_2 - 2\lambda y_1 - 2\mu y_2 + 2\lambda z_1 + 2\mu z_2 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 + 2\lambda y_2 + 2\mu y_2 - \lambda z_1 - \mu z_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} -x_1 - 2y_1 + 2z_1 \\ x_1 + 2y_1 - z_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -x_2 - 2y_2 + 2z_2 \\ x_2 + 2y_2 - z_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda p(u) + \mu p(v). \end{aligned}$$

   Donc p est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, i.e.
   $\boxed{p \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3,\ p \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right).}$

2. Par différence de deux endomorphismes, on en déduit que $q = p - \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Or

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; p(u) = u \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; p(u) - u = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; q(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} = \mathrm{Ker}\ (q).$$

   L'application q étant linéaire, Ker (q) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   $\boxed{\text{Conclusion, } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

3. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u\in \text{Ker }(p) \quad&\Leftrightarrow\quad p(u)=0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow&\quad \begin{bmatrix}-x-2y+2z\\ x+2y-z\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
&&\Leftrightarrow&\quad \begin{cases}-x-2y+2z=0\\ x+2y-z=0\\ z=0\end{cases}\\
&&\Leftrightarrow&\quad \begin{cases}-x-2y=0\\ x+2y=0\\ z=0\end{cases}\\
&&\Leftrightarrow&\quad \begin{cases}x=-2y\\ z=0\end{cases}\qquad \text{car } L_1=-L_2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Ker }(p)=\left\{\begin{bmatrix}-2y\\ y\\ 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\; y\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\right).}$$

Le vecteur $(-2,1,0)$ étant non nul il constitue une base de Ker (p).

$\boxed{\text{L'espace Ker }(p)\text{ est donc de dimension 1.}}$

Le noyau de p n'était pas réduit au vecteur nul, on en déduit également que

$\boxed{p\text{ n'est pas injective}}$.

4. La famille $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\text{Im}\,(p)&=\text{Vect}\left(f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right),f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right),f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right)\\
&=\text{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)\\
&=\text{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{array}{l}C_2\leftarrow C_2-2C_1\\ C_3\leftarrow C_3+2C_1\end{array}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Im}\,(p)=\text{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)}$$

Les vecteurs $(-1,1,0)$ et $(0,1,1)$ sont deux vecteurs non colinéaires et donc forment une famille libre de Im (p).

$\boxed{\text{Une base de Im}\,(p)\text{ est }((-1,1,0),(0,1,1))\text{. On en déduit que dim}\,(\text{Im}\,(p))=2.}$

Comme Im $(p)\neq\mathbb{R}^3$ (sa dimension est strictement plus petite que 3) par conséquent,

$\boxed{p\text{ n'est pas surjective dans }\mathbb{R}^3.}$

5. Soit $u\in$ Ker $(p)\cap$ Im (p). Le vecteur u appartenant à Ker (p), par la question 3., on a $u\in$ Vect $(-2,1,0)$. Donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $u=(-2\,\lambda,\lambda,0)$. On sait de plus que $u\in$ Im (p) et donc par la question 4. $u\in$ Vect $((-1,1,0)\ ,\ (0,1,1))$ et il existe (μ_1,μ_2) tel que

$$u=\begin{bmatrix}-2\,\lambda\\ \lambda\\ 0\end{bmatrix}=\mu_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\mu_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mu_1\\ \mu_1+\mu_2\\ \mu_2\end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases}-2\,\lambda=-\mu_1\\ \lambda=\mu_1+\mu_2\\ 0=\mu_2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lambda=\frac{\mu_1}{2}\\ \lambda=\mu_1\\ \mu_2=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\mu_1=\frac{\mu_1}{2}\\ \lambda=\mu_1\\ \mu_2=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \mu_1=\lambda=\mu_2=0.$$

Par conséquent $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc montré que $\text{Ker }(p) \cap \text{Im}\,(p) \subseteq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'ensemble $\text{Ker }(p) \cap \text{Im}\,(p)$ étant un espace vectoriel (intersection de deux espaces vectoriels), l'inclusion réciproque est également vraie et donc $\text{Ker }(p) \cap \text{Im}\,(p) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et les espaces $\text{Ker }(p)$ et $\text{Im}\,(p)$ sont en somme directe.

- *Méthode 1, avec le théorème du rang.* De plus par le théorème du rang, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, on sait que
$$\dim(\text{Ker }(p)) + \dim(\text{Im}\,(p)) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$
Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires en dimension finie, on en déduit que $\boxed{\text{Ker }(p) \text{ et } \text{Im}\,(p) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}$.

- *Méthode 2, sans le théorème du rang.* Montrons que maintenant que $\text{Ker }(p) + \text{Im}\,(p) = \mathbb{R}^3$.Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. A l'aide des questions 3. et 4., on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
u \in \text{Ker }(p) + \text{Im}\,(p) &\Leftrightarrow \exists\,(u_1, u_2) \in \text{Ker }(p) \times \text{Im}\,(p), \quad u = u_1 + u_2 \\
&\Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3, \quad u = \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = -2\,\lambda - \mu_1 \\ y = \lambda + \mu_1 + \mu_2 \\ z = \mu_2 \end{cases} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\
&\Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} & & \mu_1 & + & 2\mu_2 & = & x + 2y \\ \lambda & + & \mu_1 & + & \mu_2 & = & y \\ & & & & \mu_2 & = & z \end{array}\right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu_1 & + & \mu_2 & = & y \\ & & \mu_1 & + & 2\mu_2 & = & x + 2y \\ & & & & \mu_2 & = & z \end{array}\right.
\end{aligned}$$
Le système obtenu est échelonné avec un pivot dans chaque ligne, il admet donc pour toute valeur de (x, y, z) une solution (λ, μ_1, μ_2). Par conséquent, tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\text{Ker }(p) + \text{Im}\,(p)$. L'inclusion réciproque étant assuré par le fait que $\text{Ker }(p)$ et $\text{Im}\,(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que
$$\text{Ker }(p) + \text{Im}\,(p) = \mathbb{R}^3,$$
ce qui conjointement avec le fait que $\text{Ker }(p)$ et $\text{Im}\,(p)$ soient en somme directe démontre bien que $\boxed{\text{Ker }(p) \text{ et } \text{Im}\,(p) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$

6. Montrons que $F = \text{Im}\,(p)$. Soit $u \in F$, alors par définition de F, $p(u) = u$. Le vecteur u est donc sa propre image, en particulier u admet un antécédent (lui même) par p. Donc $u \in \text{Im}\,(p)$. Ainsi $F \subseteq \text{Im}\,(pr)$.
Réciproquement, soit $u \in \text{Im}\,(p)$. Par la question 4., il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$u = \mu_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}.$$
Dès lors,
$$p(u) = p\left(\begin{bmatrix} -\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -(-\mu_1) - 2(\mu_1 + \mu_2) + 2\mu_2 \\ -\mu_1 + 2(\mu_1 + \mu_2) - \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = u.$$
Donc $u \in F$. Ainsi $\text{Im}\,(p) \subseteq F$.
$\boxed{\text{Conclusion, } F = \text{Im}\,(p).}$

7. (a) On a les égalités vectorielles suivantes :

$$p^2(e_1) = p(p(e_1)) = p\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-(-1)-2\\-1+2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$
$$p^2(e_2) = p(p(e_2)) = p\left(\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-(-2)-2\times 2\\-2+2\times 2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}$$
$$p^2(e_3) = p(p(e_3)) = p\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2-2\times(-1)+2\\2+2\times(-1)-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{p^2(e_1) = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad p^2(e_2) = \begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}, \qquad p^2(e_3) = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}.}$$

(b) Par la question précédente, on remarque que $p^2(e_1) = p(e_1)$, $p^2(e_2) = p(e_2)$, et $p^2(e_3) = p(e_3)$. Donc p et p^2 sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base de $\mathbb{R}^3$. D'après le cours on a vu qu'il existe une unique application linéaire dont l'image de $\mathscr{B}$ donne $(p(e_1), p(e_2), p(e_3))$. Donc par unicité, on en déduit que $p^2 = p$.

Conclusion, $\boxed{p \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^3.}$

Partie II - Deux résultats généraux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un projecteur de E.

8. (a) Montrons que Ker (f) et $\operatorname{Im}(f)$ sont en somme directe. Soit $u \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Puisque $u \in \operatorname{Im}(f)$, on en déduit qu'il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. En composant par f, on obtient que $f(u) = f^2(v)$. Or f est un projecteur donc $f^2(v) = f(v)$. Ainsi, $f(u) = f(v) = u$. Or $u \in \operatorname{Ker}(f)$ donc $f(u) = 0_E$ et ainsi $u = f(u) = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subseteq \{0_E\}$. Par conséquent, $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$ et les espaces Ker (f) et $\operatorname{Im}(f)$ sont en somme directe.

Montrons que $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = E$.

NB : n'ayant aucune hypothèse sur le fait que E soit de dimension finie ou non, le théorème du rang et la caractérisation par la dimension des espaces supplémentaires ne peuvent être appliqués ici.

Analyse. Soient $u \in E$, $v \in \operatorname{Ker}(f)$ et $w \in \operatorname{Im}(f)$ tels que $u = v + w$. Puisque $w \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $w = f(x)$. Donc $u = v + f(x)$. En composant par f, on obtient que $f(u) = f(v) + f^2(x)$. Or f est un projecteur, donc $f^2 = f$ et donc $f(u) = f(v) + f(x)$. De plus $v \in \operatorname{Ker}(f)$ donc $f(v) = 0$. Ainsi $f(u) = f(x)$et par définition de x, $f(u) = f(x) = w$. Ce qui détermine w en fonction de u. On en déduit alors $v = u - w = u - f(u)$ ce qui détermine ensuite v en fonction de u.

NB : dans cette analyse, on démontre à nouveau l'unicité de la décomposition et donc le fait que les deux espaces soient en somme directe. Si vous regarder en détails le raisonnement vous y trouverez les mêmes arguments que précédemment.

Synthèse. Soit $u \in E$. Posons $v = u - f(u)$ et $w = f(u)$. Il est clair que $u = v + w$ et que $w \in \operatorname{Im}(f)$. Montrons que $v \in \operatorname{Ker}(f)$. Par linéarité de f, on a

$$f(v) = f(u - f(u)) = f(u) - f^2(u).$$

Or f est un projecteur donc $f^2(u) = f(u)$. Ainsi, $f(v) = f(u) - f(u) = 0_E$ et donc $v \in \operatorname{Ker}(v)$. Par conséquent $u = v + w \in \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)$. Donc $E \subseteq \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)$. L'inclusion réciproque découlant du fait que Ker (f) et $\operatorname{Im}(f)$ soient deux sous-ensemble de E, on en déduit que

$$\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = E.$$

Or on a déjà montré que les espaces en question étaient en somme directe. On peut donc conclure que Ker (f) et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

(b) Dans la partie I, nous avons montré dans la question 7. que p était un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et dans la question 5. que les ensembles Ker (f) et $\operatorname{Im}(f)$ étaient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Le cas particulier de } p \text{ est donc bien en accord avec le résultat général de la question précédente.}}$

9. (a) Montrons que $\text{Ker}\,(f - \text{Id}_E) = \text{Im}\,(f)$. Soit $u \in \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)$. Par définition, on a $(f - \text{Id}_E)(u) = f(u) - u = 0_E$. Donc $u = f(u)$ et donc $u \in \text{Im}\,(f)$. Ainsi $\text{Ker}\,(f - \text{Id}_E) \subseteq \text{Im}\,(f)$.
Réciproquement, soit $u \in \text{Im}\,(f)$. Par définition, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Donc $(f - \text{Id}_E)(u) = f(u) - u = f^2(v) - f(v)$. Or f est un projecteur donc $f^2(v) = f(v)$. Ainsi, $(f - \text{Id}_E)(u) = f(v) - f(v) = 0_E$. Donc $u \in \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}\,(f) \subseteq \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)$.
$\boxed{\text{Conclusion, } \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E) = \text{Im}\,(f).}$

(b) Dans la partie I, nous avons montré dans la question 7. que p était un projecteur et dans la question 6. que $\text{Im}\,(p) = F = \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)$.

$\boxed{\text{Par conséquent, le cas particulier de } p \text{ est donc bien en accord avec le résultat général de la question précédente.}}$

Exercice 2 — Des cas particuliers du lemme des noyaux

Préliminaire

1. Soit $(g, h) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrons que :

$$g \circ h = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g) \qquad (\bigstar)$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g \circ h = 0_{\mathscr{L}(E)} &\iff \forall u \in E,\ g(h(u)) = 0_E \\ &\iff \forall u \in E,\ h(u) \in \text{Ker}(g) \\ &\iff \{h(u) \mid u \in E\} \subseteq \text{Ker}\,(g) \\ &\iff \text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall (g,h) \in \mathscr{L}(E)^2,\ g \circ h = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g).}$

Partie I - Pour un polynôme de degré 2 (D'après Banque PT 2018)

2. (a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $u \in E$, on a l'équivalence suivante :

$$u = \lambda\big[f(u) - 2u\big] + \mu\big[f(u) - u\big] \iff u = (\lambda + \mu) f(u) + (-2\lambda - \mu) u$$

Il suffit $\boxed{\Leftarrow}$ alors de chercher des réels λ, μ tels que :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ -2\lambda - \mu &= 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \mu &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= -1 \\ \mu &= 1 \end{cases}$$

Posons alors $(\lambda, \mu) = (-1, 1) \underset{\checkmark}{\in} \mathbb{R}^2$.
$\boxed{\text{Conclusion : } (\lambda, \mu) = (-1, 1) \text{ convient.}}$

(b) Montrons que $E = \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) + \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ i.e. $\begin{cases} E \supset \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) + \text{Im}(f - \text{Id}_E) & (i) \\ E \subset \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) + \text{Im}(f - \text{Id}_E) & (ii) \end{cases}$.

$\boxed{\supset}$ Comme $f - 2\text{Id}_E$ et $f - \text{Id}_E$ sont des endomorphismes de E, il vient que :

$$\underbrace{\text{Im}(f - 2\text{Id}_E)}_{sev\ de\ E} + \underbrace{\text{Im}(f - \text{Id}_E)}_{sev\ de\ E} \underset{sev\ de\ E}{\subset} E$$

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in E$. Montrons que $u \in \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
D'après $2a$), on a les égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{array}{rcll} u & = & -(f(u) - 2u) + (f(u) - u) & \\ & = & -(f - 2\mathrm{Id}_E)(u) + (f - \mathrm{Id}_E)(u) & \textit{par propriétés sur les fonctions} \\ & = & \underbrace{(f - 2\mathrm{Id}_E)(-u)}_{\in \mathrm{Im}(f-2\mathrm{Id}_E)} + \underbrace{(f - \mathrm{Id}_E)(u)}_{\in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)} & \textit{par linéarité de } f - 2\mathrm{Id}_E \end{array}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } E = \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E).}$

3. – Montrons que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \underset{(\bigstar)}{\text{i.e.}} (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   On a les égalités fonctionnelles suivantes :

$$(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = (1)f^2 + (-2 - 1)f + (2)\mathrm{Id}_E = f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E \underset{f^2=3f-2\mathrm{Id}_E}{=} 0_{\mathscr{L}(E)}$$

   – Montrons que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \underset{(\bigstar)}{\text{i.e.}} (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Le calcul est analogue au précédent.

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E).}$

4. Montrons que $E = \underbrace{\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)}_{=F} \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)}_{=G}$ i.e. $\left\{ \begin{array}{ll} E = F + G & (i) \\ F \cap G = \{0_E\} & (ii) \end{array} \right.$

$\boxed{(i)}$ $\boxed{\supset}$ Trivial.

$\boxed{\subset}$ On a l'inclusion ensembliste suivante :

$$E = \underbrace{\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)}_{\subset F \textit{ d'après } 2b)} + \underbrace{\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E)}_{\subset G \textit{ d'après } 2b)} \subset F + G$$

$\boxed{(ii)}$ $\boxed{\supset}$ Trivial.

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in F \cap G$ i.e. $\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \\ u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \end{array} \right.$ i.e. $\left\{ \begin{array}{l} f(u) = 2u \\ f(u) = u \end{array} \right.$.
Montrons que $u = 0_E$.
Sachant que $f(u) = 2u = u$, on a les équivalences suivantes :

$$2u = u \Longleftrightarrow u = 0_E$$

$\boxed{\text{Conclusion : on a bien montré que } E = F \oplus G.}$

5. On a précédemment montré que $E = \underbrace{\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)}_{=F} \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)}_{=G}$.
   Comme E est de dimension finie, ses sous-espaces vectoriels F et G le sont aussi, ce qui autorise à poser la famille $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ avec $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de F et G.
   Vérifions que $\mathscr{B}$ convient i.e. $\left\{ \begin{array}{ll} \mathscr{B} \text{ est une base de } E & (i) \\ \forall u \in \mathscr{B},\ f(u) \text{ et } u \text{ sont colinéaires} & (ii) \end{array} \right.$

$\boxed{(i)}$ Comme $E = F \oplus G$, il vient par la concaténation des bases que $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.

$\boxed{(ii)}$ Soit $u \in \mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Montrons que $f(u)$ et u sont colinéaires.
Comme $u \in \mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$, il vient que :

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in \mathscr{B}_F \\ \text{OU} \\ u \in \mathscr{B}_G \end{array} \right. \text{ d'où : } \left\{ \begin{array}{c} u \in F \\ \text{OU} \\ u \in G \end{array} \right. \text{ d'où : } \left\{ \begin{array}{c} u \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \\ \text{OU} \\ u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \end{array} \right. \text{ d'où : } \left\{ \begin{array}{c} f(u) = 2u \\ \text{OU} \\ f(u) = u \end{array} \right.$$

Autrement dit, $f(u)$ et u sont toujours colinéaires.

$\boxed{\text{Conclusion : il existe bien une base } \mathscr{B} \text{ de } E \text{ telle que, pour tout } u \in \mathscr{B},\ f(u) \text{ et } u \text{ sont colinéaires.}}$

Partie II - Pour un polynôme de degré 3 (D'après Banque PT 2014)

6. Montrons que $\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\{0_E\}$.

$\boxed{\supset}$ Trivial.

$\boxed{\subset}$ Soit $u\in\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ i.e. :

$$\begin{cases} u\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) \\ u\in\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)\end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} f(u)=u \\ f^2(u)+f(u)+u=0_E\end{cases}.$$

Montrons que $u=0_E$.
On a les égalités vectorielles suivantes :

$$0_E=f^2(u)+f(u)+u=f(f(u))+f(u)+u \underset{f(u)=u}{=} f(u)+2u \underset{f(u)=u}{=} 3u$$

D'où $u=0_E$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\{0_E\}.}$

7. (a) On a les égalités vectorielles suivantes :

- $$\begin{aligned}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)(v) &= (f^2+f+\mathrm{Id}_E)\left(\tfrac{2u-f^2(u)-f(u)}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left[2f^2(u)-f^4(u)-f^3(u)+2f(u)-f^3(u)-f^2(u)+2u-f^2(u)-f(u)\right] && \textit{linéarité de } f \textit{ propriétés sur les fonctions} \\ &= \tfrac{1}{3}\left[(2-1-1)f^2(u)+(-1+2-1)f(u)+(-1+2-1)u\right] && \textit{car } f^3=f \\ &= 0_E\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(w) &= (f-\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}(f^2(u)+f(u)+u)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f^3(u)+f^2(u)+f(u)-f^2(u)-f(u)-u\right) && \textit{linéarité de } f \textit{ propriétés sur les fonctions} \\ &= 0_E && \textit{car } f^3=f\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } (f^2+f+\mathrm{Id}_E)(v)=(f-\mathrm{Id}_E)(w)=0_E.}$

(b) Trivialement, on a l'égalité $u=v+w$.
On a alors établi le résultat suivant :

$$\forall u\in E,\ u=\underbrace{\frac{1}{3}\left(2u-f^2(u)-f(u)\right)}_{\in\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)}+\underbrace{\frac{1}{3}(f^2(u)+f(u)+u)}_{\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)}$$

Ce qui signifie en terme ensembliste :

$$E\subset\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$$

L'autre inclusion étant toujours vraie, on en déduit :
$\boxed{\text{Conclusion : } E=\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E).}$

8. Montrons que $E=\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$

$$\text{i.e. }\begin{cases}\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) &= \{0_E\} \quad (i)\\ \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) &= E \quad (ii)\end{cases}$$

$\boxed{(i)}$ Démontré en question 6.

$\boxed{(ii)}$ Démontré en question 7.

Exercice 3 — Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Partie I - Généralités

1. Montrons que f est un endomorphisme de E i.e. $\left\{\begin{array}{ll} f \text{ est bien définie} & (i) \\ E = F & (ii) \\ f \text{ est linéaire} & (iii) \end{array}\right.$.

$\boxed{(i)}$ Soit $M \in E$. Montrons que $f(M) \in F = E$.
Or $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n$ est une combinaison linéaire de matrices carrées de taille n, donc est une matrice carrée de taille n.

$\boxed{(ii)}$ Trivial.

$\boxed{(iii)}$ Soit $(M, N) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$.
On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda M + \mu N) & = & \lambda M + \mu N + \mathrm{Tr}(\lambda M + \mu N)\mathcal{I}_n & \\ & = & \lambda M + \mu N + (\lambda \mathrm{Tr}(M) + \mu \mathrm{Tr}(N))\mathcal{I}_n & \text{linéarité de la trace} \\ & = & \lambda(M + \mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n) + \mu(N + \mathrm{Tr}(N)\mathcal{I}_n) & \\ & = & \lambda f(M) + \mu f(N) & \end{array}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. Soit $M \in E$. Simplifions $(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)(M)$.
On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{array}{rcll} (f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)(M) & = & (f - \mathrm{Id}_E)^2(M) & \text{car } f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E)^2 \\ & = & (f - \mathrm{Id}_E)((f - \mathrm{Id}_E)(M)) & \\ & = & (f - \mathrm{Id}_E)(f(M) - \mathrm{Id}_E(M)) & \\ & = & (f - \mathrm{Id}_E)(M + \mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n - M) & \\ & = & (f - \mathrm{Id}_E)(\mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n) & \\ & = & \mathrm{Tr}(M)(f - \mathrm{Id}_E)(\mathcal{I}_n) & \text{car } f - \mathrm{Id}_E \text{ est linéaire} \\ & = & \mathrm{Tr}(M)(f(\mathcal{I}_n) - \mathrm{Id}_E(\mathcal{I}_n)) & \\ & = & \mathrm{Tr}(M)(\mathcal{I}_n + \mathrm{Tr}(\mathcal{I}_n)\mathcal{I}_n - \mathcal{I}_n) & \\ & = & n\mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n & \end{array}$$

$\boxed{\text{Conclusion : pour tout } M \in E,\ (f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E)(M) = n\mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n.}$

3. Soit $M \in \mathrm{Ker} f$ i.e. $f(M) = \mathcal{O}_n$. En composant cette égalité par la trace, on en déduit ensuite les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(M + \mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n) = \mathrm{Tr}(\mathcal{O}_n) & \underset{\text{linéarité de Tr}}{\iff} & \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(\mathcal{I}_n) = 0_{\mathbb{R}} \\ & \iff & (1+n)\mathrm{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}} \underset{1+n \neq 0}{\iff} \mathrm{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}} \end{array}$$

On en déduit alors que :

$$f(M) = \mathcal{O}_n \iff M + \mathrm{Tr}(M)\mathcal{I}_n = \mathcal{O}_n \underset{\mathrm{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}}}{\iff} M = \mathcal{O}_n$$

Ainsi, $\mathrm{Ker} f \subset \{\mathcal{O}_n\}$, d'où $\mathrm{Ker} f = \{\mathcal{O}_n\}$, d'où f est injective.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall M \in \mathrm{Ker} f,\ \mathrm{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}} \text{ et } f \text{ est injective.}}$

Partie II - Étude du cas particulier $n = 2$

4. La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$\boxed{\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)}$$

et

$$\boxed{f(\mathscr{B}) = \left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right).}$$

5. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \mathrm{Ker(Tr)} & = & \left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a_{11}+a_{22}=0\right\}\\
 & & = & \left\{\begin{bmatrix}-a_{22} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ avec } (a_{22}, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
 & & = & \left\{a_{22}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \text{ avec } (a_{22}, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
\text{d'où :} & \mathrm{Ker(Tr)} & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right)
\end{array}$$

La famille $\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}} = (-E_{11}+E_{22}, E_{12}, E_{21})$ est une famille génératrice de Ker(Tr), et est libre (justification laissée au lecteur), donc $\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}$ est une base de Ker(Tr).

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}} = (-E_{11}+E_{22}, E_{12}, E_{21}) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker(Tr)}) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}) = 3.}$

6. La famille $(\mathcal{I}_2)$ est libre (car constituée d'un seul vecteur non nul) et est génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathcal{I}_2)$, donc est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{I}_2)$.
Montrons que $\mathrm{Ker(Tr)} \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ i.e. $(\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrons que $(\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ i.e. $\left\{\begin{array}{ll}(\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2) \text{ est génératrice de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & (i)\\ \mathrm{Card}(\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2) = \dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & (ii) \quad \checkmark\end{array}\right.$

$\boxed{(ii)}$ On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2) & = & \mathrm{Vect}(-E_{11}+E_{22}, E_{12}, E_{21}, \mathcal{I}_2) & \\
 & = & \mathrm{Vect}(E_{22}, E_{12}, E_{21}, \mathcal{I}_2) & u_1 \leftarrow \frac{1}{2}(u_1+u_4)\\
 & = & \mathrm{Vect}(E_{22}, E_{12}, E_{21}, E_{11}) & u_4 \leftarrow u_4 - u_1
\end{array}$$

Ainsi, $(\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2)$ est génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{Ker(Tr)} \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

7. Posons $\mathscr{B}' = (\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2)$.
Vérifions que $\mathscr{B}' = (\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2)$ convient i.e. $\left\{\begin{array}{ll}\mathscr{B}' \text{ est une base de } E & (i)\\ \forall u \in \mathscr{B}',\ f(u) \text{ et } u \text{ sont colinéaires} & (ii)\end{array}\right.$

$\boxed{(i)}$ Déjà fait.

$\boxed{(ii)}$ Soit $M \in \mathscr{B}'$. Montrons que $f(M)$ et M sont colinéaires.
Comme $M \in \mathscr{B}' = (\mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}, \mathcal{I}_2)$, il vient que :

$$\left[\begin{array}{c}M \in \mathscr{B}_{\mathrm{Ker(Tr)}}\\ \text{OU}\\ M = \mathcal{I}_2\end{array}\right] \quad \text{d'où :} \quad \left[\begin{array}{c}f(M) \underset{\mathrm{Tr}(M)=0_{\mathbb{R}}}{=} M\\ \text{OU}\\ f(\mathcal{I}_2) = 3\mathcal{I}_2\end{array}\right]$$

Ainsi, $f(M)$ et M sont colinéaires.

$\boxed{\text{Conclusion : il existe bien une base } \mathscr{B}' \text{ de } E \text{ telle que, pour tout } M \in \mathscr{B}',\ f(M) \text{ et } M \text{ soient colinéaires.}}$

Partie III - Étude du cas général n quelconque

8. (a) Montrons que $\text{Vect}(\mathcal{I}_n) \cap \text{Ker}(\text{Tr}) = \{\mathcal{O}_n\}$.

$\boxed{\supset}$ Trivial, car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre.

$\boxed{\subset}$ Soit $A \in \text{Vect}(\mathcal{I}_n) \cap \text{Ker}(\text{Tr})$ i.e. $\begin{cases} A \in \text{Vect}(\mathcal{I}_n) \\ A \in \text{Ker}(\text{Tr}) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid A = \lambda \mathcal{I}_n \\ \text{Tr}(A) = 0_\mathbb{R} \end{cases}$.
Montrons que $A = \mathcal{O}_n$.
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) = 0_\mathbb{R} &\iff \text{Tr}(\lambda \mathcal{I}_n) = 0_\mathbb{R} && \text{car } A = \lambda \mathcal{I}_n \\ &\iff \lambda \text{Tr}(\mathcal{I}_n) = 0_\mathbb{R} && \text{par linéarité de la trace} \\ &\iff \lambda n = 0_\mathbb{R} && \text{car } \text{Tr}(I_n) = n \\ &\iff \lambda = 0_\mathbb{R} && \text{car } n \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $A = \lambda \mathcal{I}_n = \mathcal{O}_n$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \text{Vect}(\mathcal{I}_n) \cap \text{Ker}(\text{Tr}) = \{\mathcal{O}_n\}.}$

(b) i. Sachant que Tr est une forme linéaire, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\text{Tr}\left(M - \frac{\text{Tr}(M)}{n}\mathcal{I}_n\right) = \text{Tr}(M) - \frac{\text{Tr}(M)}{n}\underbrace{\text{Tr}(\mathcal{I}_n)}_{=n} = 0_\mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : Tr}\left(M - \frac{\text{Tr}(M)}{n}\mathcal{I}_n\right) = 0_\mathbb{R}.}$$

ii. On en déduit alors :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M = \underbrace{M - \frac{\text{Tr}(M)}{n}\mathcal{I}_n}_{\in \text{Ker}(\text{Tr})} + \underbrace{\frac{\text{Tr}(M)}{n}\mathcal{I}_n}_{\in \text{Vect}(\mathcal{I}_n)} \iff \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(\text{Tr}) + \text{Vect}(\mathcal{I}_n)$$

L'autre inclusion étant toujours vraie, il vient alors que :

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{Tr}) + \text{Vect}(\mathcal{I}_n).}$

(c) Par $8a)$ et $8b)ii.$, il vient que :

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(\mathcal{I}_n).}$

9. Montrons que :

$$(i)\ \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Ker}(\text{Tr}) \qquad \text{et} \qquad (ii)\ \text{Ker}(f - (n+1)\text{Id}_E) = \text{Vect}(\mathcal{I}_n)$$

$\boxed{(i)}$ On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - \text{Id}_E) &= \{M \in E,\ (f - \text{Id}_E)(M) = 0_E\} \\ &= \{M \in E,\ f(M) - M = 0_E\} \\ &= \{M \in E,\ \text{Tr}(M)\mathcal{I}_n = 0_E\} \\ &= \{M \in E,\ \text{Tr}(M) = 0_\mathbb{R}\} && \text{car } \mathcal{I}_n \neq 0_E \\ &= \text{KerTr} \end{aligned}$$

$\boxed{(ii)}$ Montrons que par double inclusion que $\text{Ker}(f - (n+1)\text{Id}_E) = \text{Vect}(\mathcal{I}_n)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $M \in \text{Ker}(f - (n+1)\text{Id}_E)$ i.e. $(f - (n+1)\text{Id}_E)(M) = \mathcal{O}_n$ i.e. $f(M) = (n+1)M$. Montrons que $M \in \text{Vect}(\mathcal{I}_n)$.
On a les équivalences suivantes :

$$f(M) = (n+1)M \iff M + \text{Tr}(M)\mathcal{I}_n = (n+1)M \iff M = \underbrace{\frac{\text{Tr}(M)}{n}}_{=\lambda \in \mathbb{R}}\mathcal{I}_n \in \text{Vect}(\mathcal{I}_n)$$

$\boxed{\supset}$ Soit $M \in \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n)$ i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid M = \lambda \mathcal{I}_n$.
Montrons que $M \in \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E)$ i.e. $f(M) = (n+1)M$.
On a les égalités matricielles suivantes :

$$f(M) = f(\lambda \mathcal{I}_n) = \lambda \mathcal{I}_n + \mathrm{Tr}(\lambda \mathcal{I}_n)\mathcal{I}_n = (1+n)(\lambda \mathcal{I}_n) = (n+1)M$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n).}$

Exercice 4 — Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Les parties I et II sont totalement indépendantes. La partie III dépend des parties I et II.

Partie I - Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'application f suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X^2+1)P(1) + P(X) \end{array} \right.$$

1. Il est facile de voir que f est bien définie car si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors

$$\deg\left(f(P)\right) \leqslant \max\left(\deg\left((X^2+1)P(1)\right),\ \deg\left(P\right)\right) \leqslant 2.$$

Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda P + \mu Q\right) &= \left(X^2+1\right)\left(\lambda P + \mu Q\right)(1) + \left(\lambda P + \mu Q\right)(X) \\ &= \lambda\left[\left(X^2+1\right)P(1) + P(X)\right] + \mu\left[\left(X^2+1\right)Q(1) + Q(X)\right] \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est linéaire et est donc bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

2. Soient $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ et $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}\ (f) \quad &\Leftrightarrow \quad f\left(P\right) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(X^2+1\right)\left(a_0 + a_1 + a_2\right) + a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad 2a_0 + a_1 + a_2 + a_1 X + \left(a_0 + a_1 + 2a_2\right) X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}\ (f) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_0 + a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_0 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_0 + 2a_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_0 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 3a_2 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = a_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}. \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ (f) = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}.}$$

3. On pose $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = X^2 - 2$ et $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$.
   (a) La famille $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes échelonnés en leurs degrés. Donc $\mathscr{B}$ est libre. Or Card $(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f(1) = \left(X^2+1\right)\times 1 + 1 = X^2+2 \\ f(P_2) &= f(X-1) = \left(X^2+1\right)\times(1-1) + X - 1 = X - 1 \\ f(P_3) &= f\left(X^2-2\right) = \left(X^2+1\right)\times(1-2) + X^2 - 2 = -X^2 - 1 + X^2 - 2 = -3. \end{aligned}$$

   Conclusion

$$\boxed{f(P_1) = X^2+2, \qquad f(P_2) = X-1, \qquad f(P_3) = -3.}$$

   (c) Puisque $\mathscr{B}$ est une base (question (a)), on en déduit que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(P_1),\ f(P_2),\ f(P_3)\right).$$

   Donc par la question (b),

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(X^2+2,\ X-1,\ -3\right).$$

   La famille $\mathscr{B}' = \left(X^2+2,\ X-1,\ -3\right)$ est une famille de polynômes échelonnés en leurs degrés et est donc libre. Or Card $(\mathscr{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. D'où

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X].}$$

   NB : on a vu dans la question 2., que le noyau de f est réduit au vecteur nul. Donc f est injective. Or f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Donc par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en déduit que f est un automorphisme. En particulier, f est surjective et donc on retrouve par ce raisonnement que $Im(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

4. D'après la question 1., f est un endomorphisme. De plus dans la question 2., on a vu que Ker $(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$ et donc f est injective. Enfin dans la question 3., on a vu que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$ et donc f est surjective. Donc f est un endomorphisme bijectif et donc
   $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E.}$

Partie II - Détermination d'itérées

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E.
On suppose que u vérifie :

$$u^2 - 4u + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad (\bigstar)$$

Enfin, on pose :

$$g = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}u \qquad \text{et} \qquad h = \mathrm{Id}_E - g$$

5. D'après la question $(\bigstar)$, on a $u^2 - 4u = -3\mathrm{Id}_E$ i.e. $\frac{4}{3}u - \frac{1}{3}u^2 = \mathrm{Id}_E$. Par conséquent,

$$u \circ \left(\frac{4}{3}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{3}u\right) = \left(\frac{4}{3}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{3}u\right) \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

   Ceci démontre que $\boxed{u \text{ est bijective et que } u^{-1} = \frac{4}{3}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{3}u.}$

6. Dans $\mathscr{L}(E)$, on a les calculs suivants

$$g^2 = \left(\frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}u\right)^2 = \frac{9}{4}\mathrm{Id}_E - \frac{3}{2}u + \frac{1}{4}u^2.$$

   Or $u^2 = 4u - 3\mathrm{Id}_E$, donc

$$g^2 = \frac{9}{4}\mathrm{Id}_E - \frac{3}{2}u + u - \frac{3}{4}\mathrm{Id}_E = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}u.$$

   On conclut que $\boxed{g^2 = g}$. On a alors

$$g \circ h = g \circ (\mathrm{Id}_E - g) = g - g^2 = g - g = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

De même,

$$h \circ g = (\mathrm{Id}_E - g) \circ g = g - g^2 = g - g = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Donc $\boxed{g \circ h = h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}}$. Enfin

$$h^2 = (\mathrm{Id}_E - g)^2 = \mathrm{Id}_E - 2g + g^2 = \mathrm{Id}_E - 2g + g = \mathrm{Id}_E - g.$$

Conclusion, $\boxed{h^2 = h}$.

7. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a alors $u = \alpha g + \beta h$ si et seulement si

$$u = \alpha g + \beta \mathrm{Id}_E - \beta g = \frac{3\alpha - 3\beta}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{\alpha - \beta}{2}u + \beta \mathrm{Id}_E = \frac{3\alpha - \beta}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{\alpha - \beta}{2}u$$

En particulier, on observe que c'est le cas lorsque $3\alpha - \beta = 0$ et $-\frac{\alpha-\beta}{2} = 1$. Résolvons donc le système suivant :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ -\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ -\frac{\alpha - 3\alpha}{2} = \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

On a donc montré que SI $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ ALORS on a $u = g + 3h$. Vérifions-le (non obligatoire) :

$$g + 3h = g + 3\mathrm{Id}_E - 3g = 3\mathrm{Id}_E - 2g = 3\mathrm{Id}_E - 3\mathrm{Id}_E + u = u.$$

Donc $\boxed{\text{pour } \alpha = 1 \text{ et } \beta = 3 \text{ on a } u = g + 3h.}$

8. Procédons par récurrence et définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $u^n = \alpha^n g + \beta^n h = g + 3^n h$ ».
   - *Initialisation.* Si $n = 0$, alors $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (par définition) et $g + 3^0 h = g + h = g + \mathrm{Id}_E - g = \mathrm{Id}_E$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Montrons alors $\mathscr{P}(n+1)$ est également vraie. On a

   $$\begin{aligned} u^{n+1} = u \circ u^n &= u \circ (g + 3^n h) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (g + 3h) \circ (g + 3^n h) && \text{d'après la question précédente} \\ &= g^2 + 3^n g \circ h + 3h \circ g + 3^{n+1} h^2. \end{aligned}$$

   Or, d'après la question 6., on sait que $g^2 = g$, $g \circ h = h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $h^2 = h$. Par conséquent,

   $$u^{n+1} = g + 3^{n+1} h^2.$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   On a donc montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u^n = g + 3^n h.}$

Partie III - Étude des itérées de f

9. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned} f^2(P) - 4f(P) + 3P &= f\left(\left(X^2+1\right)P(1) + P(X)\right) - 4\left(X^2+1\right)P(1) - 4P(X) + 3P(X) \\ &= \left(X^2+1\right)\left[\left(1^2+1\right)P(1) + P(1)\right] \\ &\quad + \left(X^2+1\right)P(1) + P(X) - 4\left(X^2+1\right)P(1) - P(X) \\ &= 3\left(X^2+1\right)P(1) + \left(X^2+1\right)P(1) - 4\left(X^2+1\right)P(1) \\ &= 0_{\mathbb{R}_2[X]}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a donc bien } f^2 - 4 + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])} \text{ et } f \text{ vérifie bien la condition } (\bigstar).}$

On reprend désormais les notations et résultats établis en partie II avec $u = f$.

10. Par définition de g, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$g(P) = \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}f(P) = \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}\left(X^2+1\right)P(1) - \frac{1}{2}P = P - \frac{1}{2}\left(X^2+1\right)P(1).$$

Et par suite,

$$h(P) = P - g(P) = P - P + \frac{1}{2}\left(X^2+1\right)P(1) = \frac{1}{2}\left(X^2+1\right)P(1).$$

$\boxed{\text{On a donc pour tout } P \in \mathbb{R}_2[X],\ g(P) = P - \tfrac{1}{2}\left(X^2+1\right)P(1) \text{ et } h(P) = \tfrac{1}{2}\left(X^2+1\right)P(1).}$

11. En appliquant la question 8. à f, on obtient que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f^n(P) = g(P) + 3^n h(P)$. Donc par les expressions de $g(P)$ et de $h(P)$ déterminées à la question précédente, on trouve que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$f^n(P) = P - \frac{1}{2}\left(X^2+1\right)P(1) + 3^n\frac{1}{2}\left(X^2+1\right)P(1) = P + \frac{3^n-1}{2}\left(X^2+1\right)P(1).$$

$\boxed{\text{Donc pour tout } P \in \mathbb{R}_2[X],\ f^n(P) = P + \tfrac{3^n-1}{2}\left(X^2+1\right)P(1).}$

NB : on vérifie facilement que la formule est vraie pour $n = 1$, cela n'implique pas que l'on a bon mais on n'a pas trop faux au moins.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. De la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned} f^n(P_1) &= f^n(1) = 1 + \frac{3^n-1}{2}\left(X^2+1\right) = \frac{3^n-1}{2}X^2 + \frac{3^n+1}{2} \\ f^n(P_2) &= f^n(X-1) = X - 1 + \frac{3^n-1}{2}\left(X^2+1\right)\times 0 = X - 1. \end{aligned}$$

NB : P_2 est un point fixe de f.

Enfin,

$$\begin{aligned} f^n(P_3) = f^n\left(X^2-2\right) &= X^2 - 2 + \frac{3^n-1}{2}\left(X^2+1\right)\times(1-2) \\ &= X^2 - 2 - \frac{3^n-1}{2}\left(X^2+1\right) \\ &= -\frac{3^n-3}{2}X^2 - \frac{3^n+3}{2}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que pour $n = 1$, la formule est cohérente avec la question 3..(b).

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f^n(P_1) = \frac{3^n-1}{2}X^2 + \frac{3^n+1}{2}, \qquad f^n(P_1) = X - 1, \qquad f^n(P_1) = -\frac{3^n-3}{2}X^2 - \frac{3^n+3}{2}.}$$