Épreuve de Mathématiques 8
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Etude d'une suite implicite par les séries

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

On considère également la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f \quad : \quad \begin{aligned}[0;1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x - x^2.\end{aligned}$$

1. (a) Déterminer le tableau de variation de f.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}.$$
   (c) Préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Peut-on en déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$?
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$.
3. Soit $x \in [0;1[$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$.
4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.
   (a) Montrer que qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}.$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$a_n \geqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}.$$
   (c) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.
5. Soit $x \in]1;+\infty[$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$ diverge.
6. (a) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
7. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n u_n$.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$w_{n+1} - w_n = u_n \left(1 - (n+1)\, u_n\right).$$
   (b) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera ω sa limite.
   (c) Justifier que $\omega \neq 0$ et en déduire un équivalent de u_n.
   (d) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ et en déduire que $\omega = 1$.

Problème 2 - Nombre de dérangements

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I - une formule explicite du nombre de dérangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $E_n = [\![1; n]\!]$. On introduit les notations suivantes.

- On note $\mathscr{B}_n$ l'ensemble des **bijections** de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$.
- Soient $k \in [\![0; n]\!]$ et $f \in \mathscr{B}_n$. On dit que f possède exactement k points fixes si et seulement s'il existe $A \subseteq E_n$ une partie de E_n de cardinal k telle que

$$\forall s \in A, \quad f(s) = s \qquad \text{et} \qquad \forall s \in E_n \setminus A, \quad f(s) \neq s.$$

  Notamment si $k = 0$, l'application f ne laisse fixe aucun élément de E_n et si $k = n$, l'application f laisse fixe tous les éléments de E_n.
- Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on note $F_{n,k}$ l'ensemble des bijections de E_n ayant exactement k points fixes.
- On appelle enfin dérangement les éléments de $F_{n,0}$, l'ensemble des bijections n'ayant aucun point fixe et on pose d_n le nombre de dérangements de E_n ou encore le nombre de dérangements d'un ensemble quelconque ayant n éléments.
- Par convention $d_0 = 1$.

1. Si $n = 1$, peut-on avoir un dérangement ? Justifier. En déduire d_1.
2. Décrire les éléments de $\mathscr{B}_2$ et en déduire d_2.
3. On représente $f \in \mathscr{B}_3$ par le tableau suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ représente l'identité de E_3.
   (a) A l'aide de cette représentation énumérer (on n'exigera pas de justification) tous les éléments de $\mathscr{B}_3$.
   (b) En déduire d_3.
4. On suppose dans la suite $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
   (a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Exprimer Card $(F_{n,n-k})$ en fonction de d_k.
   (b) Rappeler sans démonstration le cardinal de $\mathscr{B}_n$.
   (c) En déduire que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

On pose
$$A_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}\, j!$$

5. Montrer que
$$A_n = \sum_{k=0}^{n} d_k \left(\sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{j}{k} \right).$$
6. On considère dans cette question une urne contenant n boules distinctes numérotées de 1 à n. Montrer à l'aide d'un **raisonnement combinatoire** que
$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{j}\binom{j}{k}.$$
Indication : on pourra présenter une expérience faisant intervenir des tirages permettant de créer deux lots de boules.
7. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-k}{j-k}$. Que dire de cette somme si $k = n$?
8. Déduire des questions précédentes que $A_n = d_n$.
9. Montrer enfin que
$$d_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$
10. Cinq étudiants de PTSI1 ont enlevé leurs beaux pulls beiges pour jouer au rugby. Après leur partie, il reparte chacun avec un pull sans vérifier s'il s'agissait bien du leur. De combien de façons est-il possible qu'aucun étudiant ne soit parti avec son pull ?

Partie II - équivalent du nombre de dérangements

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\, S_n(x).$$

11. Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$,
$$|u_n(x)| = |u_{n-2}(x)| \, \frac{x^2}{n\,(n-1)}.$$
En déduire la limite de $n^2\,|u_n(x)|$ quand n tend vers $+\infty$.
12. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(x)|$ puis de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Justifier que f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée.
    (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$$|f_n(x) - f_n(0)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}\, \mathrm{e}^{|x|}.$$
14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^{x}.$$
15. *On pourra admettre le résultat de la question 9.* En déduire un équivalent simple de d_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 3 - Théorème de factorisation (d'après Banque PT 2010)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère $u \in \mathscr{L}(E,F)$, et $v \in \mathscr{L}(E,G)$. Le but de ce problème est de démontrer l'équivalence suivante puis d'en donner un exemple concret sur les polynômes.

$$\text{Ker }(u) \subseteq \text{Ker }(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists w \in \mathscr{L}(F,G), \quad v = w \circ u.$$

Partie I - Etude générale

1. On suppose dans cette question qu'il existe $w \in \mathscr{L}(F,G)$, telle que $v = w \circ u$. Montrer que Ker $(u) \subseteq$ Ker (v).
2. On note $n = \dim(E)$, $r = \dim(F)$ et $p = n - \dim(\text{Ker }(u))$.
   (a) Justifier qu'il existe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de Ker (u).
   Quelle est la dimension de $\text{Im}(u)$?
   (b) Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que $(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une base de $\text{Im}(u)$.
   (c) On complète la famille $(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ par des vecteurs $(f_{p+1}, \ldots, f_r)$ de telle sorte que $(f_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ soit une base de F. On définit alors $w \in \mathscr{L}(F,G)$ par
   $$\forall i \in [\![1;r]\!], \qquad w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } i \in [\![1;p]\!] \\ 0_G & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que si Ker $(u) \subseteq$ Ker (v) alors $v = w \circ u$.

Partie II - un exemple dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit

$$u \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto X^2P'' - 2P. \end{aligned}$$

3. Montrer que u est un endomorphisme de E.
4. Déterminer le noyau de u.
5. Déterminer le rang de u.

On pose

$$v \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_1[X] \\ P &\mapsto \left(P(0) + P(1) - \frac{P''(1)}{2}\right)X + P(0) + 2P(1) - P''(1). \end{aligned}$$

On admet que v est linéaire.

6. Montrer que Ker $(u) \subseteq$ Ker (v). En déduire qu'il existe $w \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_1[X])$ telle que $v = w \circ u$.
7. Montrer que w définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $w(P) = -\frac{X+1}{2}P(0) - \frac{X+2}{2}P(1)$ vérifie la relation précédente.
8. (a) Calculer $v(1)$ et $v(X)$.
   (b) En déduire que v est surjective.
9. Montrer que si $n \geqslant 3$, alors Ker $(u) \neq$ Ker (v).