Correction du DS8

Problème 1 - Etude d'une suite implicite par les séries

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

On considère également la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f \quad : \quad \begin{aligned} [0;1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - x^2. \end{aligned}$$

1. (a) La fonction f étant polynomiale sur $[0;1]$ est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$,

$$f'(x) = 1 - 2x.$$

En particulier, pour $x \in [0;1]$, on a les équivalences suivantes

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \geqslant 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leqslant \frac{1}{2}.$$

De plus $f(0) = f(1) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

(b) On procède par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{P}_n \qquad « \; 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4} \; ».$$

Initialisation. Si $n = 0$ alors $u_0 = \frac{1}{4}$ et donc on a bien $0 < u_0 \leqslant \frac{1}{4}$ i.e. $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On sait que $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$. Or d'après la question précédente, la fonction f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc

$$f(0) < f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n+4}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+4} - \frac{1}{(n+4)^2} = \frac{n+4-1}{(n+4)^2} = \frac{n+3}{(n+4)^2}.$$

Comparons $\frac{n+3}{(n+4)^2}$ à $\frac{1}{n+5}$. On a les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{n+3}{(n+4)^2} \leqslant \frac{1}{n+5} \qquad &\Leftrightarrow \qquad (n+3)(n+5) \leqslant (n+4)^2 \qquad \text{car } n+5 > 0 \text{ et } (n+4)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad n^2 + 8n + 15 \leqslant n^2 + 8n + 16 \\ &\Leftrightarrow \qquad 15 \leqslant 16. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que $\frac{n+3}{(n+4)^2} \leqslant \frac{1}{n+5}$ et donc par transitivité,

$$0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+5}.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Finalement on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}.}$$

(c) D'après la question précédente et le théorème d'encadrement, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne diverge donc pas grossièrement mais
$\boxed{\text{on ne peut conclure à cette étape de sa convergence ou non}}$
(et l'inégalité précédente n'est pas assez précise pour utiliser le théorème de comparaison).

2. Par la question 1.(b) et stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < u_n^2 \leqslant \frac{1}{(n+4)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 \text{ converge}}$.

3. Soit $x \in [0;1[$. Par la question 1.(b), puisque $x \geqslant 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n x^n \leqslant \frac{x^n}{n+4} \leqslant x^n.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge en tant que série géométrique de raison $x \in [0;1[$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n \text{ converge}}$.

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.

(a) Puisque $\ell = \frac{\ell+\ell}{2} > \frac{\ell+1}{2}$. Par définition de la limite, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\ell+1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est strictement positif. Donc $a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}.}$$

(b) On pose pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ la propriété « $a_n \geqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$ ». Montrons que $\mathscr{P}_n$ est vraie par récurrence.
Initialisation. Si $n = n_0$ alors, $a_{n_0} = a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0-n_0}$ et donc $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Alors par la question précédente (car $n \geqslant n_0$) puis l'hypothèse de récurrence,

$$a_{n+1} \underset{Q4.(b)}{\geqslant} a_n \frac{\ell+1}{2} \underset{H.R.}{\geqslant} a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \frac{\ell+1}{2} = a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n+1-n_0}.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
On a donc montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \quad a_n \geqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}.}$$

(c) On sait que $\ell > 1$. Donc $\frac{\ell+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ diverge en tant que série géométrique de raison $q = \frac{\ell+1}{2} > 1$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n_0}}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ diverge également. Or pour tout $n \geqslant n_0$, on a montré à la question précédente que

$$0 \leqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \leqslant a_n.$$

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ diverge}}$.

5. Soit $x \in]1; +\infty[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n x^n$. D'après la question 1.(b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = \frac{u_n - u_n^2}{u_n} x = (1 - u_n)\, x.$$

Donc d'après la question 1.(c), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x.$$

Puisque $x > 1$, il découle de la question 4 que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n \text{ diverge}}$.

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\right].$$

On reconnait une série télescopique. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) = \ln(u_{n+1}) + \ln(4).$$

Or d'après la question 1.(c), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(u_{n+1}) + \ln(4) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par conséquent,

$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ diverge}}$.

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n)$. Or d'après la question 1.(c), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\ln(1 - u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n.$$

De plus, d'après la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(1 - u_n)$ diverge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_n < 0$ (d'après la question 1.(b)). Or deux séries dont les termes généraux sont équivalents et de signe constant (ici négatif) sont de même nature, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} -u_n$ diverge. Conclusion $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge.}}$

7. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de w_n puis de u_n,

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)\, u_{n+1} - n u_n = (n+1)\left(u_n - u_n^2\right) - n u_n = u_n - (n+1)\, u_n^2.$$

En factorisant par u_n, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n = u_n \left(1 - (n+1)\, u_n\right).}$$

(b) D'après la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}$ et donc $(n+1)\, u_n \leqslant \frac{n+1}{n+4} \leqslant 1$. Donc $1 - (n+1)\, u_n$ et on a toujours $u_n \geqslant 0$. Donc d'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n \geqslant 0.$$

Autrement dit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Or, toujours par la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n u_n \leqslant \frac{n}{n+4} \leqslant 1$. Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que $\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$. On notera ω sa limite.

(c) Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit que $\omega \geqslant w_1 = 1 \times u_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} > 0$. Donc $\omega \neq 0$. Le réel ω étant non nul et la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\omega \neq 0 \qquad \text{et} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega}{n}.}$$

(d) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ est une série télescopique. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (w_{k+1} - w_k) = w_{n+1} - w_0 = w_{n+1}.$$

Or nous avons vu à la question 7.(b) que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers ω). On en déduit donc que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ est une série convergente (et sa somme totale vaut ω). D'autre part, par les questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &\underset{Q7.(a)}{=} u_n\,(1 - (n+1)\,u_n) \\
&\underset{Q7.(c)}{=} \left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - (n+1)\left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)(1 - \omega + o\,(1)) \\
&= \frac{\omega\,(1-\omega)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Procédons maintenant par un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\omega \neq 1$. On a déjà vu à la question précédente que $\omega \neq 0$. Donc on en déduit que $\omega\,(1-\omega) \neq 0$ et par suite,

$$w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega\,(1-\omega)}{n}.$$

De plus on a vu à la question 7.(b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$. Or deux séries dont les termes généraux sont équivalents et de signe constant ont même nature. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\omega(1-\omega)}{n}$. Or d'une part, on a vu que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ converge et d'autre part, puisque $\omega\,(1-\omega) \neq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\omega(1-\omega)}{n} = \omega\,(1-\omega) \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que multiple de la série harmonique ce qui contredit le fait que les séries sont de même nature. Conclusion, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n) \text{ converge et } \omega = 1}$.

Problème 2 - Nombre de dérangements

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I - une formule explicite du nombre de dérangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $n = 1$, $E_1 = \{1\}$. Donc l'unique application de E_1 dans E_1 est l'identité qui à 1 associe 1. Cette application est une bijection qui admet un unique point fixe et ne « dérange » aucun élément de E_1. Conclusion, $\boxed{\text{si } n = 1, \text{ nous n'avons aucun dérangement. et } d_1 = 0}$.
2. Si $n = 2$, on a $E_2 = \{1, 2\}$. Pour construire une bijection f de E_2, nous avons deux choix pour l'image de 1 : $f(1) = 1$ ou $f(1) = 2$. Une fois l'image de 1 choisit, nous n'avons plus qu'un seul choix pour $f(2)$, il faut prendre « l'autre » élément. Autrement dit si $f(1) = 1$ par injectivité de f, $f(2) \neq f(1)$ et donc $f(2) = 2$. De même si $f(1) = 2$ alors $f(2) = 1$. Nous avons donc deux bijections :
$\boxed{\text{l'identité } \mathrm{Id}_{E_2} \text{ et la permutation qui envoie 1 sur 2 et 2 sur 1}}$.
Parmi ces deux bijections, seule la seconde est un dérangement. Donc $\boxed{d_2 = 1}$.
3. On représente $f \in \mathscr{B}_3$ par le tableau suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ représente l'identité de E_3.
   (a) L'ensemble des bijections de E_3 sont
$$\boxed{\mathscr{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.}$$
   (b) Parmi ces bijections, les suivantes sont des dérangements :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   On en déduit que $\boxed{d_3 = 2}$.
4. On suppose dans la suite $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
   (a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Pour construire un élément f de $F_{n,n-k}$ on procède comme suit :
      - On choisit $n - k$ éléments parmi les n de E_n qui constitueront les points fixes de f. On a donc $\binom{n}{n-k}$ possibilités de choisir ces éléments. Les images de ces éléments sont automatiquement déterminées. En effet si i est un point fixe alors $f(i) = i$. Il nous reste donc à déterminer les images de autres éléments.
      - Notons A l'ensemble des k éléments non fixes. Construire les images des k éléments non fixes, revient à construire une bijection de A dans A mais une bijection sans aucun point fixe. En d'autres termes, il faut construire un dérangement de A. On a donc par définition $d_{\mathrm{Card}\,(A)} = d_k$ choix.

   Au total, on obtient
$$\binom{n}{n-k} d_k$$
   façon de construire un élément de $F_{n,n-k}$. Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Card}\,(F_{n,n-k}) = \binom{n}{n-k} d_k.}$$
   (b) D'après le cours,
$$\boxed{\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_n) = n!}$$

(c) Si f est une bijection alors il existe un unique $k \in [\![0;n]\!]$ tel que f admette exactement k points fixes. Autrement dit,
$$\mathscr{B}_n = \sqcup_{k\in[\![0;n]\!]} F_{n,n-k}.$$
Par conséquent, à l'aide des questions précédentes,
$$n! \underset{Q4.(b)}{=} \text{Card }(\mathscr{B}_n) = \text{Card }\left(\sqcup_{k\in[\![0;n]\!]} F_{n,n-k}\right) \underset{Q4.(a)}{=} \sum_{k=0}^{n} \text{Card }(F_{n,n-k}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k.$$
Or on sait que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. Conclusion,
$$\boxed{n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.}$$

On pose
$$A_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}\, j!$$

5. A l'aide de la question précédente, on écrit que
$$A_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} d_k\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \binom{j}{k} d_k$$
On reconnait une somme triangulaire,
$$A_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant j\leqslant n} d_k\,(-1)^{n-j} \binom{n}{j}\binom{j}{k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} \underbrace{d_k}_{\text{indépendant de } j} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}\binom{j}{k}$$
On conclut que
$$\boxed{A_n = \sum_{k=0}^{n} d_k \left(\sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}\binom{j}{k}\right).}$$

6. On considère dans cette question une urne contenant n boules distinctes numérotées de 1 à n. On souhaite alors tirer sans remise deux lots de boules, l'un de k boules et l'autre de $j-k$ boules, où $k \in [\![0;n]\!]$ et $j \in [\![0;k]\!]$. Première méthode
   - on effectue un tirage simultané de k boules parmi les n, cela constituera notre premier lot : $\binom{n}{k}$ possibilités,
   - on effectue ensuite un second tirage de $j-k$ boules parmi les $n-k$ boules restantes de l'urne, cela constituera notre second lot : $\binom{n-k}{j-k}$ possibilités.

   Au total, on a $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}$. Mais l'on peut obtenir le même résultat par un mode opératoire différent. Dans une seconde méthode,
   - On effectue un tirage de j boules parmi les n de l'urne : $\binom{n}{j}$ possibilités.
   - puis on sépare ces j boules en deux tas distincts. On tire donc dans ces j boules, k boules qui constitueront un premier lot, les $j-k$ boules restantes constitueront notre second lot : $\binom{j}{k}$ possibilités.

   Au total, on a $\binom{n}{j}\binom{j}{k}$. Ces deux opérations conduisant au même résultat, on en déduit que
$$\boxed{\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{j}\binom{j}{k}.}$$

7. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. A l'aide du changement de variable $i = j-k$, on a
$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-k}{j-k} = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-i-k} \binom{n-k}{i}.$$

On reconnait alors un binôme de Newton $(a+b)^{n-k}$ avec $a=1$ et $b=-1$. Donc

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-k}{j-k} = (1-1)^{n-k} = 0 \qquad \text{car } n-k \neq 0.$$

D'autre part, si $k=n$, $\sum_{j=n}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-n}{j-n} = (-1)^{n-n} \binom{0}{n-n} = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-k}{j-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0; n-1]\!] \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}}$$

8. En reprend la question 5,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} d_k \left(\sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{j}{k} \right).$$

Donc par la question 6,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} d_k \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{indépendant de } j} \binom{n-k}{j-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-k}{j-k}.$$

D'après la question 7, seul l'indice $k=n$ retourne une valeur non nulle. Ainsi,

$$A_n = \binom{n}{n} d_n \times 1 = d_n.$$

Conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{A_n = d_n.}$$

9. En reprenant la définition de A_n, on a montré que

$$d_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j! = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} (-1)^{n-j} j! = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!} (-1)^{n-j} = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}.$$

On effectue alors le changement d'indice $\tilde{j} = n-j$ pour conclure que

$$\boxed{d_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.}$$

10. On numérote chaque étudiant de 1 à 5 et l'on donne le même numéro à son pull. Attribuer un pull à chaque étudiant revient alors à construire une bijection de E_5 dans E_5. Si l'on souhaite qu'aucun étudiant ne reparte avec son pull, il faut et il suffit que cette bijection soit un dérangement. De fait, on cherche d_5. Grâce à la formule de la question précédente :

$$d_5 = 5! \sum_{j=0}^{5} \frac{(-1)^j}{j!} = 120 \times \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44.$$

$\boxed{\text{Les étudiants ont donc 44 façons différentes de repartir sans qu'aucun n'ait pris son propre pull.}}$

Partie II - équivalent du nombre de dérangements

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} S_n(x).$$

11. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x^{n-2}x^2}{(n-2)!(n-1)n}\right| = \left|u_{n-2}(x)\frac{x^2}{n(n-1)}\right|.$$

Or $\frac{x^2}{n(n-1)} \geqslant 0$, donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$\boxed{|u_n(x)| = |u_{n-2}(x)| \frac{x^2}{n(n-1)}.}$$

Or par croissance comparée, on sait que $x^n \underset{n\to+\infty}{\ll} n!$ donc $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ou encore $|u_{n-2}(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 |u_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} |u_{n-2}(x)| x^2 \frac{n^2}{n(n-1)} = 0 \times x^2 \times 1 = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^2 |u_n(x)| = 0.}$$

12. D'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} n^2 |u_n(x)| = 0$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant n^2 |u_n(x)| \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(x)|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ converge absolument. Or la convergence absolue entraine la convergence donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ converge. Conclusion,

$$\boxed{\text{les séries } \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(x)| \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \text{ convergent.}}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) La fonction S_n est une fonction polynomiale. Donc f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} S_n(x) + \mathrm{e}^{-x} S_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} S_n(x) + \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=1}^{n} k\frac{x^{k-1}}{k!} = -\mathrm{e}^{-x} S_n(x) + \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

A l'aide du changement d'indice $\tilde{k} = k - 1$, on écrit que

$$f_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} S_n(x) + \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = -\mathrm{e}^{-x} S_n(x) + \mathrm{e}^{-x} S_{n-1}(x) = -\mathrm{e}^{-x} (S_n(x) - S_{n-1}(x)) = -\mathrm{e}^{-x} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\boxed{\text{Conclusion, } f_n \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \frac{x^n}{n!}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, par le théorème des accroissements finis, on a

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leqslant \sup_{z\in[0;x]} |f_n'(z)| \, |x| \, .$$

Donc par la question précédente,

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leqslant \sup_{z\in[0;x]} \left| -\mathrm{e}^{-z} \frac{z^n}{n!} \right| |x| \, .$$

Or pour tout $z \in [0;x]$, par croissance de l'exponentielle, $\mathrm{e}^{-z} \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$. Donc

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leqslant \sup_{z\in[0;x]} \left|\frac{z^n}{n!}\right| |x|\,\mathrm{e}^{|x|} = \sup_{z\in[0;x]} \frac{|z|^n}{n!} |x|\,\mathrm{e}^{|x|} = \frac{|x|^n}{n!} |x|\,\mathrm{e}^{|x|} = \frac{|x|^{n+1}}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f_n(x) - f_n(0)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}\,.}$$

14. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f_n(0) = S_n(0) = 1$ donc par la question précédente,

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\, S_n(x) - 1\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}\,\mathrm{e}^{|x|}\,.$$

Or par croissance comparée, $\frac{|x|^{n+1}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par le théorème d'encadrement des suites, on en déduit que $|\mathrm{e}^{-x}\, S_n(x) - 1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, S_n(x) = 1,$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \mathrm{e}^x\,.$$

Ainsi la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^x. On retrouve le fait que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge mais l'on en déduit également la valeur de sa somme totale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x\,.}$$

15. D'après la question 9, $d_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} = n! S_n(-1)$ et d'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} S_n(-1) = \mathrm{e}^{-1}$ donc $S_n(-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}$. Conclusion,

$$\boxed{d_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!\,\mathrm{e}^{-1}\,.}$$

Problème 3 - Théorème de factorisation (d'après Banque PT 2010)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère $u \in \mathscr{L}(E,F)$, et $v \in \mathscr{L}(E,G)$. Le but de ce problème est de démontrer l'équivalence suivante puis d'en donner un exemple concret sur les polynômes.

$$\text{Ker }(u) \subseteq \text{Ker }(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists w \in \mathscr{L}(F,G)\,, \quad v = w \circ u.$$

Partie I - Etude générale

1. Soit $w \in \mathscr{L}(F,G)$, telle que $v = w \circ u$. Montrons que Ker $(u) \subseteq$ Ker (v). Soit $x \in Ker\,(u)$, alors $u(x) = 0_F$. En composant par w, on a

$$v(x) = w \circ u(x) = w\,(u(x)) = w\,(0_F) = 0_G \qquad \text{car } w \text{ est linéaire.}$$

Donc $x \in$ Ker (v). Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker }(u) \subseteq \text{Ker }(v)\,.}$$

2. On note $n = \dim(E)$, $r = \dim(F)$ et $p = n - \dim(\text{Ker }(u))$.

   (a) Puisque $\dim(\text{Ker }(u)) = p - n$ et donc que Ker (u) est de dimension finie égale à $p-n$, on en déduit d'après le cours qu'il existe $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une famille de $n-p$ vecteurs de Ker (u) qui soit une base de Ker (u). Par le théorème de la base incomplète, on peut ensuite compléter cette base en $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On a donc bien construit $\boxed{\text{une base } (e_1, \ldots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } (e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ soit une base de Ker } (u).}$ De plus par le théorème du rang,

$$\boxed{\dim(\text{Im}\,(u)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker }(u)) = n - (n-p) = p.}$$

   (b) Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, on pose $f_i = u\,(e_i)$. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ puisque f_i est l'image d'un élément de E par u, on en déduit que $f_i \in \text{Im}\,(u)$. Montrons que $(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une famille libre. Soient $(\lambda_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^p$ telle que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i = 0_F.$$

Donc, par linéarité de u,

$$0_F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f\,(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i\right).$$

Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i \in$ Ker (u). Or $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base et donc une famille génératrice de Ker (u). Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i \in \text{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)\,.$$

Donc il existe $(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0_E.$$

Ainsi

$$\lambda_1\, e_1 + \cdots + \lambda_p\, e_p + (-\,\lambda_{p+1})\, e_{p+1} + \cdots + (-\,\lambda_n)\, e_n = 0_E$$

Or $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et est donc une famille libre. Donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = -\,\lambda_{p+1} = \cdots = -\,\lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

En particulier, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\lambda_i = 0$. On a donc bien prouvé que $(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une famille libre de $\text{Im}\,(u)$. Or, d'après la question précédente,

$$\text{Card}\,\left((f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}\right) = p = \dim(\text{Im}\,(u))\,.$$

On en conclut que $\boxed{(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \text{ est une base de Im}\,(u)}$.

(c) On complète la famille $(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ par des vecteurs $(f_{p+1},\dots,f_r)$ de telle sorte que $(f_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ soit une base de F. On définit alors $w\in\mathscr{L}(F,G)$ par

$$\forall i\in[\![1;r]\!],\qquad w(f_i)=\begin{cases}v(e_i) & \text{si } i\in[\![1;p]\!]\\ 0_G & \text{sinon.}\end{cases}$$

On suppose que Ker $(u)\subseteq$ Ker (v). Montrons que $v=w\circ u$. On sait que u, v et w sont des applications linéaires et que des applications linéaires sont entièrement définies par l'image d'une base. Il nous suffit donc de montrer que pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, $v(e_i)=w\circ u(e_i)$. Soit $i\in[\![1;n]\!]$.

- Premier cas, $i\in[\![1;p]\!]$, alors par définition de f_i, on a $u(e_i)=f_i$ et donc

$$w\circ u(e_i)=w(f_i)=v(e_i)\qquad\qquad \text{par définition de } v(e_i).$$

- Second cas, $i\in[\![p+1;n]\!]$ alors par construction de la famille $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, on sait que $e_i\in$ Ker (u), donc $u(e_i)=0_F$ et par composition par w, $w\circ u(e_i)=0_G$. D'autre part, on a supposé que Ker $(u)\subseteq$ Ker (v) donc on a également $e_i\in$ Ker (v), i.e. $v(e_i)=0_G$. Ainsi on obtient

$$w\circ u(e_i)=0_G=v(e_i)\,.$$

On a donc bien montré que pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, $w\circ u(e_i)=v(e_i)$. Or des applications linéaires coïncidant sur une base sont égales. Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker }(u)\subseteq\text{Ker }(v)\qquad\Rightarrow\qquad v=w\circ u.}$$

Partie II - un exemple dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n\geqslant 2$. On pose $E=\mathbb{R}_n[X]$ et on définit

$$\begin{aligned} u\quad:\quad &\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]\\ &P\mapsto X^2P''-2P.\end{aligned}$$

3. L'application u est bien définie car si $P\in\mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg(P)\leqslant n$ et donc

$$\deg(u(P))\leqslant\max\left(\deg\left(X^2P''\right),\deg(2P)\right)=\max\left(2+\deg(P'')-2,\deg(P)\right)=\deg(P)\leqslant n.$$

Donc $u(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.
Soient maintenant $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$. On a

$$\begin{aligned} u(\lambda P+\mu Q)&=X^2(\lambda P+\mu Q)''-2(\lambda P+\mu Q)\\ &=X^2(\lambda P''+\mu Q'')-2\lambda P-2\mu Q\qquad\qquad\text{par linéarité de la dérivation}\\ &=\lambda\left(X^2P''-2P\right)+\mu\left(X^2Q''-2Q\right)\\ &=\lambda u(P)+\mu u(Q)\,.\end{aligned}$$

Donc u est linéaire et va de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E.}$

4. Soit $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$, où $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}^{n+1}$.
Notez que l'on exige pas forcément que $\deg(P)=n$ *i.e. que* $a_n\neq 0$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P\in\text{Ker }(u)\quad&\Leftrightarrow\quad u(P)=0_{\mathbb{R}_n[X]}\\ &\Leftrightarrow\quad X^2P''-2P=0_{\mathbb{R}_n[X]}\\ &\Leftrightarrow\quad X^2\sum_{k=2}^n k(k-1)a_kX^{k-2}-2\sum_{k=0}^n a_kX^k=0_{\mathbb{R}_n[X]}\\ &\Leftrightarrow\quad \sum_{k=2}^n k(k-1)a_kX^k-\sum_{k=2}^n 2a_kX^k-2a_0-2a_1X=0_{\mathbb{R}_n[X]}\\ &\Leftrightarrow\quad \sum_{k=2}^n\left[k(k-1)-2\right]a_kX^k-2a_0-2a_1X=0_{\mathbb{R}_n[X]}.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker }(u) &\Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2;n]\!], \quad [k(k-1)-2]\, a_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2;n]\!], \quad \left[k^2-k-2\right] a_k = 0 \end{aligned}$$

Or si Δ est le discriminant de k^2-k-2, on a $\Delta = 1+8 = 9$. Donc $k^2-k-2 \Leftrightarrow k = \frac{1+3}{2}$ ou $k = \frac{1-3}{2}$. Or $k \in N$, donc $k^2-k-2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$. Ceci étant établit, on en déduit que

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker }(u) &\Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![3;n]\!], \quad a_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P = a_2 X^2. \end{aligned}$$

On en déduit que Ker $(u) = \left\{ a_2 X^2 \mid a_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker }(u) = \text{Vect}\left(X^2\right).}$$

5. D'après la question précédente, $\dim(\text{Ker }(u)) = 1$. Donc par le théorème du rang,

$$\text{rg}\,(u) = \dim(E) - \dim(\text{Ker }(u)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = n+1-1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{rg}\,(u) = n.}$$

On pose

$$\begin{aligned} v \quad : \quad & \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_1[X] \\ & P \mapsto \left(P(0) + P(1) - \frac{P''(1)}{2}\right) X + P(0) + 2P(1) - P''(1). \end{aligned}$$

On admet que v est linéaire.

6. Puisque $\left(X^2\right)'' = 2$, on a les égalités entre polynômes suivantes :

$$v\left(X^2\right) = \left(0 + 1 - \frac{2}{2}\right) X + 0 + 2 - 2 = 0_{\mathbb{R}_1[X]}.$$

Ainsi $X^2 \in$ Ker (v) donc Ker $(u) =$ Vect $\left(X^2\right) \subseteq$ Ker (v). Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker }(u) \subseteq \text{Ker }(v).}$$

Donc d'après la question 2.(c), $\boxed{\text{il existe } w \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_1[X]) \text{ telle que } v = w \circ u}$.

7. On vérifie facilement que l'application w définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $w(P) = -\frac{X+1}{2}P(0) - \frac{X+2}{2}P(1)$ est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_1[X])$. Montrons que $v = w \circ u$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ posons $Q = u(P)$. On a alors

$$Q(0) = 0^2 P''(0) - 2P(0) = -2P(0) \qquad \text{et} \qquad Q(1) = 1^2 P''(1) - 2P(1) = P''(1) - 2P(1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} w \circ u\,(P) = w\,(Q) &= -\frac{X+1}{2} Q(0) - \frac{X+2}{2} Q(1) \\ &= -\frac{X+1}{2}(-2P(0)) - \frac{X+2}{2}(P''(1) - 2P(1)) \\ &= P(0)X + P(0) - \frac{P''(1)}{2} X - P''(1) + XP(1) + 2P(1) \\ &= \left(P(0) + P(1) - \frac{P''(1)}{2}\right) X + P(0) + 2P(1) - P''(1) \\ &= v\,(P). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on conclut que

$$\boxed{w \circ u = v.}$$

8. (a) Puisque $1'' = X'' = 0$, par définition de v, on a

$$v(1) = \left(1 + 1 - \frac{0}{2}\right) X + 1 + 2 - 0 = 2X + 3 \qquad \text{et} \qquad v(X) = \left(0 + 1 - \frac{0}{2}\right) X + 0 + 2 - 0 = X + 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{v(1) = 2X + 3 \qquad \text{et} \qquad v(X) = X + 2.}$$

(b) Les vecteurs $v(1)$ et $v(X)$ sont bien entendu des vecteurs de $\mathrm{Im}\,(v)$. Or d'après la question précédente, $v(1) = 2X + 3$ et $v(X) = X + 2$. Ces vecteurs sont donc non colinéaires et forme donc une famille libre de $\mathrm{Im}\,(v)$. Donc

$$2 = \mathrm{Card}\ (v(1), v(X)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(v)) \leqslant \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2,$$

la dernière inégalité découlant du fait que $\mathrm{Im}\,(v) \subseteq \mathbb{R}_1[X]$. Donc $\dim(\mathrm{Im}\,(v)) = 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$. Or $\mathrm{Im}\,(v) \subseteq \mathbb{R}_1[X]$ donc on conclut que

$$\mathrm{Im}\,(v) = \mathbb{R}_1[X]$$

i.e. $\boxed{v \text{ est surjective}}$.

9. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}\,(v) = \mathbb{R}_1[X]$ et donc $\mathrm{rg}\,(v) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$. Donc d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}\ (v)) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{espace de départ de } v}}{\dim(\mathbb{R}_n[X])} - \mathrm{rg}\,(v) = n + 1 - 2 = n - 1.$$

Donc si $n \geqslant 3$,

$$\dim(\mathrm{Ker}\ (v)) \geqslant 2.$$

Or d'après la question 4, on sait que $\mathrm{Ker}\ (u) = \mathrm{Vect}\left(X^2\right)$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}\ (u)) = 1$. Ainsi

$$\dim(\mathrm{Ker}\ (v)) \geqslant 2 > 1 = \dim(\mathrm{Ker}\ (u)).$$

Conclusion, les dimensions étant différentes, on a nécessairement,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ (u) \neq \mathrm{Ker}\ (v).}$$