Correction du DS9

Exercice 1 - Algèbre linéaire

1. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a les égalités polynomiales suivantes :

$$\begin{aligned} f(P) &= f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) \underset{\text{linéarité}}{=} a_0 f(1_{\mathbb{R}_3[X]}) + a_1 f(X) + a_2 f(X^2) + a_3 f(X^3) \\ &= a_0 \times (0_{\mathbb{R}_2[X]}) + a_1 \times (-2X) + a_2 \times (2 - 2X^2) + a_3 \times (6X) \\ &= (2a_2) + (-2a_1 + 6a_3)X + (-2a_2)X^2 + (0_{\mathbb{R}})X^3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = 2a_2 + (-2a_1 + 6a_3)X - 2a_2X^2.}$

2. Montrons que $f = g$ i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.
Sachant que

$$\begin{array}{rclcl} g(1_{\mathbb{R}_3[X]}) &=& (1+X^2)(1)'' - 2X(1)' &=& 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ g(X) &=& (1+X^2)(X)'' - 2X(X)' &=& -2X \\ g(X^2) &=& (1+X^2)(X^2)'' - 2X(X^2)' &=& 2 - 2X^2 \\ g(X^3) &=& (1+X^2)(X^3)'' - 2X(X^3)' &=& 6X \end{array}$$

on trouve que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
$\boxed{\text{Conclusion : } f = g.}$

3. Par définition, l'application linéaire canoniquement associée à A est :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ n'est pas l'application linéaire canoniquement associée à } A.}$

4. (a) i. En notant $C_1, \cdots, C_4$ les colonnes de la matrice A, on a les égalités entre entiers naturels suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4) \underset{C_1 = 0_{\mathbb{R}^4}}{=} \mathrm{rg}(C_2, C_3, C_4) \\ &\underset{C_4 = -3C_2}{=} \mathrm{rg}(C_2, C_3) \underset{(C_2, C_3)\ libre}{=} \mathrm{Card}(C_2, C_3) = 2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{rg}A = 2 = \mathrm{rg}f.}$

ii. $\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}(C_2, C_3), \text{ d'où } \mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(-2X, 2 - 2X^2) = \mathrm{Vect}(X, 1 - X^2)}$

iii. Le théorème du rang (version matricielle) appliquée à la matrice A permet d'écrire l'équivalence suivante :

$$\underbrace{\text{Nb de col de } A}_{=4} = \dim(\mathrm{Ker}A) + \underbrace{\mathrm{rg}A}_{=2} \Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}A) = 2$$

On en déduit alors qu'il existe deux colonnes non colinéaires X_1 et X_2 telles que :

$$\mathrm{Ker}A = \mathrm{Vect}(X_1, X_2) \underset{\substack{C_1 = 0_{\mathbb{R}^4} \\ 3C_2 + C_4 = 0_{\mathbb{R}^4}}}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{Ker}A = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \text{ d'où } \mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}(1_{\mathbb{R}_2[X]}, 3X + X^3).}$$

(b) La famille $(1_{\mathbb{R}_2[X]}, 3X+X^3)$ est génératrice de $\mathrm{Ker} f$ (car $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(1_{\mathbb{R}_2[X]}, 3X+X^3)$) et est libre (car composée de deux vecteurs non colinéaires), donc est une base de $\mathrm{Ker} f$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{B}_1 = (1_{\mathbb{R}_2[X]}, 3X+X^3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f.}$

La famille $(X, 1-X^2)$ est génératrice de $\mathrm{Im} f$ (car $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(X, 1-X^2)$) et est libre (car composée de deux vecteurs non colinéaires), donc est une base de $\mathrm{Im} f$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{B}_2 = (X, 1-X^2) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f.}$

5. Montrons que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ i.e. $\begin{cases} \mathscr{B}' \text{ est libre} & (i) \\ \mathrm{Card}(\mathscr{B}') = \dim(\mathbb{R}_3[X]) & (ii) \quad \checkmark \end{cases}$

$\boxed{(i)}$ La famille $\mathscr{B}'$ est constituée de polynômes non nuls ET de degrés échelonnés, donc est libre.

> Conclusion : $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
> Donc, par théorème de concaténation, $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$.

6. Montrons l'égalité ensembliste $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \mathrm{Im} f$.

Sachant que la matrice $A + 2\mathcal{I}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ est de rang 2 et possède donc un noyau de dimension 2 (par le théorème du rang), il existe Y_1 et Y_2 deux colonnes non colinéaires telles que :

$$\mathrm{Ker}(A + 2\mathcal{I}_4) \quad = \quad \mathrm{Vect}(Y_1, Y_2) \underset{\substack{C_1 - C_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \\ C_2 = 0_{\mathbb{R}^4}}}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = \mathrm{Vect}(1 - X^2, X)$, et par la question 3, on trouve bien que :

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = \mathrm{Im} f.}$

7. On a l'égalité matricielle suivante :

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

car :

- pour tout $u \in \mathscr{B}_1$: $u \in \mathrm{Ker} f \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.
- pour tout $u \in \mathscr{B}_2$: $u \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}) \iff f(u) = -2u$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.}$$

8. Par la formule de changement de bases pour les applications linéaires :

$$A = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} D P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} D (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$$

Posons $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \underset{\checkmark}{\in} \mathscr{G}\mathrm{L}_4(\mathbb{K})$.

$\boxed{\text{Conclusion : il existe bien } P \text{ inversible telle que } A = PDP^{-1}.}$

9. Par une récurrence triviale, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$$

Par définition de la matrice de passage, il vient que :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et en inversant, on obtient ensuite :} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 & -3 \times (-2)^n \\ 0 & 0 & -(-2)^n & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(-2)^n & 1 \\ 0 & (-2)^n & 0 & -3 \times (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(-2)^n & 1 \\ 0 & (-2)^n & 0 & -3 \times (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.}$$

Problème 2 - Intégration

On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}$ est définie et même continue sur $[0;1]$ car pour tout $t \in [0;1]$, $x+t \geqslant x > 0$. Donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie i.e. $f(x)$ existe. On a donc précisé que pour tout $x > 0$, $f(x)$ existe et par conséquent $\boxed{f \text{ est définie sur }]0;+\infty[}$.
   De plus pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0;1]$, $x+t > 0$ et $\mathrm{e}^t > 0$. Donc par croissance de l'intégrale,
   $$\forall x > 0, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t > \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) > 0.}$$
2. Soit $x > 0$. Par le changement de variable $u = x+t$, $t = u - x$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, on a
   $$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^{u-x}}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u.}$$
3. (a) On pose $G : \begin{cases}]0;+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^u}{u} \end{cases}$. La fonction $g : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^u}{u}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction G est l'unique primitive de g sur $]0;+\infty[$ s'annulant en 1. En particulier G est dérivable sur $]0;+\infty[$ de dérivée g qui est continue. Donc G est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,
   $$G'(x) = g(x).$$
   Or par la question précédente et la relation de Chasles, pour tout $x > 0$,
   $$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x}\left(\int_1^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{x} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(G(x+1) - G(x)\right).$$
   Donc $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0;+\infty[}$ en tant que produit et différence de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

   (b) Avec les notations de la question précédente, on a vu que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a
   $$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(G(x+1) - G(x)\right).$$
   La fonction f est dérivable et pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left(G(x+1) - G(x)\right) + \mathrm{e}^{-x}\left(G'(x+1) - G'(x)\right) = -f(x) + \mathrm{e}^{-x}\left(g(x+1) - g(x)\right).$$
   Donc par définition de g, pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} - \frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x+x+1}}{x+1} - \frac{\mathrm{e}^{-x+x}}{x}.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) + f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x}.}$$

4. Soit $x>0$. On pose pour tout $t\in[0;1]$,

$$u(t)=\frac{1}{x+t} \qquad \text{et} \qquad v(t)=\mathrm{e}^t.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $t\in[0;1]$,

$$u'(t)=-\frac{1}{(x+t)^2} \qquad \text{et} \qquad v'(t)=\mathrm{e}^t.$$

Donc par intégration par parties,

$$f(x)=\left[\frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\right]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1 -\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^1}{x+1}-\frac{1}{x}+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x>0,\quad f(x)=\frac{\mathrm{e}}{x+1}-\frac{1}{x}+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.}$$

5. Par la question 3.(b), pour tout $x>0$,

$$f'(x)=-f(x)+\frac{\mathrm{e}}{x+1}-\frac{1}{x}.$$

En injectant la formule obtenue pour $f(x)$ dans la question précédente, on trouve

$$f'(x)=-\left[\frac{\mathrm{e}}{x+1}-\frac{1}{x}+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right]+\frac{\mathrm{e}}{x+1}-\frac{1}{x}=\int_0^1-\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

En posant pour tout $x>0$ et tout $t\in[0;1]$, $\alpha(x,t)=-\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}$, on conclut que

$$f'(x)=\int_0^1-\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

6. (a) Soit $x>0$, pour tout $t\in[0;1]$, $\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}>0$, donc par positivité de l'intégrale

$$f'(x)=-\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t<0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x>0$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[.}$

(b) Par la question précédente, f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et d'après la question 1., la fonction f est positive donc minorée par 0 sur $]0;+\infty[$. On en déduit par le théorème de convergence monotone que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ converge en } +\infty \text{ vers un réel fixé}}$ (et que sa limite est positive ou nulle).

7. (a) Soit $x>0$, pour tout $t\in[0;1]$, on a $0<x\leqslant x+t\leqslant x+1$ (le fait que tout soit positif est important !). Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0.+\infty[$, on a

$$\forall t\in[0;1],\quad \frac{1}{x+1}\leqslant\frac{1}{x+t}\leqslant\frac{1}{x}.$$

Or pour tout $t\in[0;1]$, $\mathrm{e}^t\geqslant 0$, donc

$$\forall t\in[0;1],\quad \frac{\mathrm{e}^t}{x+1}\leqslant\frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\leqslant\frac{\mathrm{e}^t}{x}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{x+1}\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{x}\,\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{x+1}\left[\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=1}\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{\mathrm{e}-1}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{x}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x>0,\quad \frac{\mathrm{e}-1}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{x}.}$$

(b) En divisant l'inégalité de la question précédente par $\frac{\mathrm{e}-1}{x}$ qui est bien strictement positif, on constate que

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{x+1} \leqslant \frac{f(x)}{\frac{\mathrm{e}-1}{x}} \leqslant 1.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Donc par le théorème d'encadrement des suites, on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{\mathrm{e}-1}{x}} = 1$$

i.e.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}-1}{x}.}$$

8. On définit pour tout $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t-1}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

(a) La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$. Par conséquent, pour tout $t \in [0;1]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^t - 1$. De plus la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) donc, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t \in [0;1]$,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^t - 1 = \left|\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^0\right| \leqslant \sup_{s\in[0;t]} |\mathrm{e}^s|\,|t-0| \leqslant \sup_{s\in[0;1]} |\mathrm{e}^s|\,t = \mathrm{e}\,t.$$

En posant $M = \mathrm{e} > 0$, on conclut que

$$\boxed{\forall t \in [0;1], \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant \mathrm{e}\,t.}$$

(b) Soit $x > 0$. Par la question précédente et la croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t-1}{t+x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}\,t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, pour tout $t \in [0;1]$, $t + x \geqslant t \iff \frac{t}{x+t} \leqslant 1$ donc pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{\mathrm{e}\,t}{t+x} \leqslant \mathrm{e}$. Ainsi, toujours par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, on en déduit que $\boxed{g \text{ est une fonction bornée sur }]0;+\infty[}$.

9. Soit $x > 0$. Par définition de f et de g, on a

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t-1}{x+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t = g(x) + \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Donc par la question précédente, en rappelant que $M = \mathrm{e}$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e} + \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t &= [\ln(x+t)]_{t=0}^{t=1} \qquad \textit{car } x+t>0\\ &= \ln(x+1) - \ln(x)\\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).\end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).}$$

10. Pour tout $x>0$, $x+1>x$ donc $\frac{x+1}{x}>1$ et ainsi $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)>0$. Donc par l'inégalité précédente,

$$\forall x>0, \qquad 1 \leqslant \frac{f(x)}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}+1.$$

Or

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \underbrace{\ln(1+x)}_{\to 0} - \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} = +\infty.$$

Donc,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement, en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = 1,$$

i.e.

$$f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

De plus,

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} -\ln(x).$$

Donc par transitivité de la relation d'équivalence :

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} -\ln(x).}$$

Exercice 3 - Probabilités (d'après Banque PT 2018, sujet A)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. On possède n boules numérotées de 1 à n que l'on range de façon aléatoire, équiprobable dans N cases, numérotées de 1 à N. Il est possible de ranger autant de boules que désiré dans une case et l'on suppose que le rangement d'une boule est indépendant du rangement des autres boules.

- Pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; N]\!]$, on définit l'évènement

$$A_{i,j} \quad : \quad \text{« la boule } i \text{ est rangée dans la case } j \text{ ».}$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'évènement

$$T_k \quad : \quad \text{« } k \text{ cases exactement contiennent au moins une boule ».}$$

1. Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; N]\!]$. Le choix du placement de la boule i parmi les N cases est indépendant des autres rangements déjà effectués, nous avons donc toujours les N cases de disponibles. On a donc N choix pour la boule i et notre rangement étant équiprobable, la probabilité de ranger la boule i dans la case j est donc

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{i,j}) = \frac{1}{N}.}$$

2. Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; N]\!]$, $(k, l) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; N]\!]$.
   - Premier cas, $(i, j) = (k, l)$. Alors d'après la question précédente,

   $$\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{k,l}) = \mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{i,j}) = \mathbb{P}(A_{i,j}) = \frac{1}{N}.$$

   - Deuxième cas $i = k$ et $j \neq l$. Alors $A_{i,j}$ correspond au fait de ranger la boule i dans la case j et $A_{k,l} = A_{i,l}$ correspond à ranger la boule i dans la case l. Comme $l \neq j$, il est impossible de ranger la boule i à la fois dans la case j et à la fois dans la case l. Donc

   $$\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{k,l}) == \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

   - Dernier cas, $i \neq k$. Alors le fait de ranger la boule i étant indépendant du fait de ranger la boule j, on obtient :

   $$\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{k,l}) = \mathbb{P}(A_{i,j})\,\mathbb{P}(A_{k,l}) = \frac{1}{N}\frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{k,l}) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{si } i = k,\ j \neq l \\ \frac{1}{N^2} & \text{si } i \neq k. \end{cases}}$$

3. - Si $n \leqslant N$. Alors puisque l'on range n boules, il est possible qu'une seule case soit occupée (et contient alors toutes les boules) ou que deux cases soient occupées, ..., ou que n cases parmi les N soient occupées (une boule alors par case). Cependant, avec n boules, nous ne pouvons pas occuper plus que n cases. Donc T_{n+1} est quant à lui négligeable. Conclusion,

   $$\boxed{\text{Si } n \leqslant N, \text{ alors } \forall k \in [\![1; n]\!],\ T_k \text{ est non négligeable.}}$$

   - Si $n > N$. Alors il est toujours possible de n'occuper qu'une seule case ou deux cases etc. Cependant ayant cette fois-ci plus de boules que de cases, il est possible de remplir les N cases.

   $$\boxed{\text{Si } n > N, \text{ alors } \forall k \in [\![1; N]\!],\ T_k \text{ est non négligeable.}}$$

4. Puisque l'on range une seule boule, une seule case et une seule case exactement sera occupée. Donc l'évènement T_1 est certain.

$$\boxed{\mathbb{P}(T_1) = 1.}$$

5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $N \geqslant 2$.
   (a) On range deux boules parmi les N cases. T_1 est l'évènement une seule case parmi les N possibles contient au moins une boule. Dans ce contexte, cette case contient les deux boules. On a alors les configurations suivantes : les deux boules sont en case 1 ou les deux boules sont en case 2, ..., les deux boules sont en cases N. Or les deux boules en case 1 correspond à l'évènement $A_{1,1} \cap A_{2,1}$, les deux boules en 2 à $A_{1,2} \cap A_{2,2}$, ..., les deux boules en n à $A_{1,n} \cap A_{2,n}$. Ces évènements sont bien disjoints (les deux boules ne peuvent être simultanément dans deux cases distinctes). D'où
   $$\boxed{T_1 = \bigsqcup_{j \in [\![1;N]\!]} (A_{1,j} \cap A_{2,j}) .}$$
   (b) D'après la question précédente, puisque l'union est disjointe,
   $$\mathbb{P}(T_1) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{j \in [\![1;n]\!]} (A_{1,j} \cap A_{2,j})\right) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(A_{1,j} \cap A_{2,j}) .$$
   Or par hypothèse, pour tout $j \in [\![1;N]\!]$, $A_{1,j}$ et $A_{2,j}$ sont indépendants donc
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(A_{1,j})\,\mathbb{P}(A_{2,j}) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\frac{1}{N} && \textit{par la question 1} \\ &= \frac{1}{N^2} \times N = \frac{1}{N}. \end{aligned}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\mathbb{P}(T_1) = \frac{1}{N}.}$$
   (c) On observe que les boules sont toutes les deux dans la même case et alors T_1 est réalisé ou (exclusif) toutes les deux dans des cases distinctes et alors T_2 est réalisé. Autrement dit, on constant que T_2 est le complémentaire de T_1 :
   $$T_2 = \overline{T_1}.$$
   Par conséquent,
   $$\boxed{\mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}\left(\overline{T_1}\right) = 1 - \mathbb{P}(T_1) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}.}$$
6. On suppose $n \in [\![1;N]\!]$. On pose Ω l'ensemble des rangements possibles des n boules dans les N cases.
   (a) Le rangement des n boules s'assimile à n tirages (on tire le numéro de la case) successifs, avec remise (on peut choisir plusieurs fois la même case). On construit donc un n-uplet dans $[\![1;N]\!]$: N choix pour la première boule, N choix pour la deuxième,..., N choix pour la n-ième. Au total $\underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n \text{ fois}} = N^n$ choix possibles. Conclusion,
   $$\boxed{\text{Card }(\Omega) = N^n.}$$
   (b) Un rangement de n boules dans N, où chaque case contient au plus une seule boule, s'assimile à n tirage (on tire le numéro de la case) successifs, **sans remise** (on ne peut réutilisé une case précédemment choisie). On construit donc cette fois-ci un arrangement de n parmi N : N choix pour la première boule, $N-1$ pour la deuxième, ..., $N-n-1$ choix pour la n-ième. Au total $N \times (N-1) \times \cdots \times (N-(n-1)) = \frac{N!}{(N-n)!}$. Conclusion,
   $$\boxed{\text{Card }(\mathcal{T}_n) = A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}.}$$
   (c) T_n correspond à l'évènement où en rangeant les n boules, n cases ont été choisies. Nécessairement chaque case possédant une boule n'en contient qu'une. Donc T_n est réalisé si et seulement si le rangement réalisé est un rangement de $\mathcal{T}_n$. Or tous ces rangements sont équiprobables car le rangement de chaque boule est équiprobable. On en déduit donc que
   $$\boxed{\mathbb{P}(T_n) = \frac{\text{Card }(\mathcal{T}_n)}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{\frac{N!}{(N-n)!}}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}.}$$

7. Après avoir rangé nos n boules nécessairement il existe j cases pour j entre 1 et n qui possèdent au moins une boule. De plus pour $i \neq j$, $T_i \cap T_j = \emptyset$. Par conséquent, les évènements $(T_j)_{j \in [\![1;n]\!]}$ forment un système complet d'évènements incompatibles. Donc, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(S \mid T_j)\,\mathbb{P}(T_j). \tag{1}$$

Soit $j \in [\![1;n]\!]$.

- Premier cas, $j \leqslant k-1$. Si T_j est réalisé, alors avant de ranger notre $n+1$-ième boule, nous avions j cases occupée. Donc en ajoutant une boule, nous avons au plus $j+1 \leqslant k-1+1 = k$ cases occupées. Dans ce cas, on constate que S ne peut être réalisé. Autrement dit

$$\mathbb{P}(S \mid T_j) = 0.$$

- Deuxième cas, $j = k$. Si T_k est réalisé, alors avant de ranger notre $n+1$-ième boule, nous avions k cases exactement d'occupées. Par conséquent pour réaliser S il faut ranger notre dernière boule dans une nouvelle case. On a $N-k$ cases vides et le tirage étant équiprobable sur les N cases, on en déduit que

$$\mathbb{P}(S \mid T_k) = \frac{N-k}{N}.$$

- Troisième cas, $j = k+1$. Si T_{k+1} est réalisé, avant de ranger notre $n+1$-ième boule nous avons déjà $k+1$ cases exactement d'occupées. Donc pour réaliser S, il faut ranger notre dernière boule dans une de ces $k+1$ cases. On a donc $k+1$ choix parmi les N cases. Le choix étant équiprobable, on a dans ce cas,

$$\mathbb{P}(S \mid T_{k+1}) = \frac{k}{N}.$$

- Dernier cas, $j \geqslant k+2$. Si T_j alors nous avons déjà $j > k+1$ cases d'occupées. En ajoutant 1 boule supplémentaire, nous obtenons donc j ou $j+1$ cases occupées et donc toujours strictement plus que $k+1$. Dans ce cas, il est donc impossible de réaliser S :

$$\mathbb{P}(S \mid T_j) = 0.$$

A l'aide de (1), on en déduit que

$$\mathbb{P}(S) = 0 + \mathbb{P}(S \mid T_k)\,\mathbb{P}(T_k) + \mathbb{P}(S \mid T_{k+1})\,\mathbb{P}(T_{k+1}) + 0.$$

i.e.

$$\boxed{\mathbb{P}(S) = \frac{N-k}{N}\mathbb{P}(T_k) + \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_{k+1}).}$$

Exercice 4 - Algèbre linéaire, endomorphismes cycliques

Partie I - Étude d'un exemple (D'après Centrale TSI 2014)

1. On a les égalités polynomiales suivantes :

$$\begin{aligned} f(P) &= f(2+3X) = 2f(1_{\mathbb{R}_1[X]}) + 3f(X) \\ &= 2(4+X) + 3(-6-X) = (2-3)X + (8-18) = -10-X \end{aligned}$$

La famille $(P, f(P)) = (2+3X, -10-X)$ est libre (car composée de deux vecteurs non colinéaires) et de cardinal 2 égal à $\dim(\mathbb{R}_1[X])$ donc est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. En particulier, la famille $(P, f(P))$ est génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ i.e. $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(P, f(P))$.

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est bien cyclique.}}$

2. La matrice des coordonnées de $f^2(P)$ dans la base $\mathscr{B}' = (P, f(P))$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f^2(P)) &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f)\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f(P)) = (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} \times A \times \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\underset{\textit{après calculs}}{=} \begin{bmatrix} -\frac{1}{28} & \frac{5}{14} \\ -\frac{3}{28} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f^2(P)) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ d'où } f^2(P) = -2P + 3f(P).}$

3. On en déduit alors que la matrice B de f dans $\mathscr{B}'$ est donnée par :

$$B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.}$

4. (a) $\boxed{\text{Conclusion : } A^2 - 3A + 2\mathcal{I}_2 = \mathcal{O}_2.}$

   (b) Montrons que f est un automorphisme de E i.e. $\begin{cases} f \in \mathscr{L}(E) & (i) \quad \checkmark \\ f \text{ est bijective} & (ii) \end{cases}$

   $\boxed{(ii)}$ Montrons que f est bijective i.e. A est inversible.
   On a les équivalences suivantes :

$$A^2 - 3A + 2\mathcal{I}_2 = \mathcal{O}_2 \Longleftrightarrow 2\mathcal{I}_2 = 3A - A^2 \Longleftrightarrow \mathcal{I}_2 = A \times \left(\frac{3}{2}\mathcal{I}_2 - \frac{1}{2}A\right)$$

   Ainsi, A est inversible d'inverse $\frac{3}{2}\mathcal{I}_2 - \frac{1}{2}A$.

   $\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est bien un automorphisme de } E.}$

Partie II - Polynôme annulateur (D'après Banque PT 2015)

5. (a) $\boxed{\text{Conclusion : } \dim(\mathscr{L}(E)) = n^2.}$

   (b) La famille $(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n^2})$ est une famille de cardinal n^2+1 de vecteurs de $\mathscr{L}(E)$ de dimension n^2, donc est nécessairement liée.

   $\boxed{\text{Conclusion : la famille } (\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n^2}) \text{ est liée.}}$

(c) D'après la question précédente, la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n^2})$ est liée, donc il existe des $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n^2}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : le polynôme non nul } P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k \text{ vérifie } P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

6. (a) La famille $\mathscr{B} = (x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x))$ est génératrice de E (car $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$) et est de cardinal n égal à la dimension de E, donc est une base de E.

$$\boxed{\text{Conclusion : la famille } \mathscr{B} = (x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)) \text{ est une base de } E.}$$

(b) Sachant que $f^n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x)$, on a l'égalité matricielle suivante :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}.}$$

(c) Montrons que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est libre.
Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ scalaires. Supposons $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Montrons que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0_{\mathbb{K}}$.
On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{llrcll} & & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k & = & 0_{\mathscr{L}(E)} & \\ \text{d'où :} & \forall y \in E, & \displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k\right)(y) & = & 0_{\mathscr{L}(E)}(y) & \\ \text{d'où :} & \forall y \in E, & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(y) & = & 0_E & \textit{propriétés sur les fonctions} \\ \text{en particulier pour :} & y = x \underset{\checkmark}{\in} E, & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) & = & 0_E & \\ \text{d'où :} & & \lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0_{\mathbb{K}} & & & \text{car } \mathscr{B} \text{ est libre} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : la famille } (\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1}) \text{ est libre.}}$$

(d) i. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrons que $f^{n+k}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{j+k}(x)$.

Sachant que $f^n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x)$, on a les égalités entre vecteurs de E suivantes :

$$f^{n+k}(x) = f^k(f^n(x)) = f^k\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x)\right) \underset{f^k \text{ linéaire}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^k(f^j(x)) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{j+k}(x)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } f^{n+k}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{j+k}(x).}$$

ii. Montrons que $f^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j$ i.e. $\forall u \in \mathscr{B},\ f^n(u) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(u)$ ou encore $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^n(f^k(x)) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(f^k(x))$. C'est exactement ce que l'on a montré à la question précédente !

$$\boxed{\text{Conclusion : } f^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j.}$$

Fin du corrigé