II.3 Dimension de la somme

Théorème II.6 (Formule de Grassman)

Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. On pose $p = \dim(F)$, $q = \dim(G)$ et $r = \dim(F \cap G)$. On fixe $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de $F \cap G$. Puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F, $\mathscr{B}$ est une famille libre de F que l'on peut compléter en une base de F, notée $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_p)$. De même on peut compléter $\mathscr{B}$ en une base $\mathscr{B}_G = (e_1, \ldots, e_r, g_{r+1}, \ldots, g_q)$ de G. On pose $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_p, g_{r+1}, \ldots, g_q)$. Montrons que $\mathscr{B}'$ est une base de $F+G$.

- Montrons que $\mathscr{B}'$ est une famille génératrice de $F+G$. Soit $x \in F+G$. Il existe $y \in F$ et $z \in G$ tel que $x = y+z$. Puisque $\mathscr{B}_F$ est une base de F, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$y = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \lambda_p f_p.$$

  De même, $\mathscr{B}_G$ est une base de G et donc il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$z = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_r e_r + \mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_p g_q.$$

  Par conséquent,

$$\begin{aligned} & x = (\lambda_1 + \mu_1) e_1 + \cdots + (\lambda_r + \mu_r) e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \lambda_p f_p + \mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_p g_q \\ \Rightarrow \quad & x \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_p, g_{r+1}, \ldots, g_q) = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}'). \end{aligned}$$

  Donc $F+G \subseteq \operatorname{Vect}(\mathscr{B}')$. Or il est clair que $\mathscr{B}'$ est une famille de $F+G$ donc $\mathscr{B}'$ est une famille génératrice de $F+G$.
- Montrons que $\mathscr{B}'$ est libre. Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_{r+1}, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q-r}$ tel que

$$\begin{aligned} & \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \lambda_p f_p + \mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_q g_q = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \lambda_p f_p}_{\in F} = \underbrace{-(\mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_q g_q)}_{\in G} \quad (1) \end{aligned}$$

  Par conséquent, $u = -(\mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_q g_q) \in F \cap G$. Or $\mathscr{B}$ est une base de $F \cap G$ et donc il existe $(\nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que

$$\begin{aligned} & u = -(\mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_p g_q) = \nu_1 e_1 + \cdots + \nu_r e_r \\ \Leftrightarrow \quad & \nu_1 e_1 + \cdots + \nu_r e_r + \mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_q g_q = 0. \end{aligned}$$

  Or $\mathscr{B}_G$ est une base de G, donc $\nu_1 = \cdots = \nu_r = \mu_{r+1} = \ldots \mu_q = 0$. En particulier $u = 0$ et donc par (1),

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \lambda_p f_p = 0.$$

  Or $\mathscr{B}_F$ est une base de F, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. On a donc bien montré que tous les coefficients initiaux étaient nuls et donc $\mathscr{B}'$ est bien libre.

Donc $\mathscr{B}'$ est une base de $F+G$ et possède $r + (p-r) + (q-r) = p+q-r$ éléments et donc $\dim(F+G) = p+q-r = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

□

Proposition II.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E.

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$. Si $n = 0$ le résultat est direct. Supposons $n \in \mathbb{N}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Puisque E est de dimension finie, on sait que F est aussi de dimension finie, notons $p = \dim(F)$ sa dimension. Puisque F est de dimension finie, F admet une base. Soit $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. La famille $\mathscr{B}_F$ est libre dans F et donc dans E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n$ des vecteurs de E tels que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E. On pose $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et on note que $\mathscr{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre (car sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est libre) et engendre G. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G et donc $\dim(G) = n-p$. De plus puisque $\mathscr{B}$ est génératrice dans E, il est facile de voir que $F+G = E$. En utilisant la proposition précédente, on peut conclure que G est un supplémentaire de F.

□