Correction de l'exemple 8 du chapitre 18 (espaces vectoriels de dimension finie)

Enoncé

1. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$ le rang de (P_1, P_2, P_3, P_4) où

$$P_1 = -X^3 + 3X^2 + X + 2, \qquad P_2 = 5X^3 + X^2 + 2X + 4,$$
$$P_3 = 2X^3 + 5X^2 + X + 3, \qquad P_4 = 8X^3 + 3X^2 + 2X + 5.$$

2. Calculer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de $((1,1,0),(0,1,1),(2,1,-1))$.

Correction

1. Soit $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$. Par les opérations élémentaires, on ne change pas le rang. Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\mathscr{F}) &= \operatorname{rg}\big(P_1,\ 16X^2+7X+14,\ 11X^2+3X+7,\ 27X^2+10X+21\big) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + 5C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 8C_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\big(P_1,\ 11X^2+3X+7,\ 16X^2+7X+14,\ 27X^2+10X+21\big) && C_2 \leftrightarrow C_4 \\
&= \operatorname{rg}\big(P_1,\ 11X^2+3X+7,\ 16X^2+7X+14,\ 0\big) && C_4 \leftarrow C_4 - C_2 - C_3 \\
&= \operatorname{rg}\big(P_1,\ 11X^2+3X+7,\ (77-48)X+154-112\big) && C_3 \leftrightarrow 11C_3 - 16C_2 \\
&= \operatorname{rg}\big(P_1,\ 11X^2+3X+7,\ 29X+42\big).
\end{aligned}$$

La famille $\big(P_1,\ 11X^2+3X+7,\ 29X+42\big)$ est une famille de polynômes échelonnés en degrés, est donc libre. Par conséquent, $\boxed{\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = 3}$.

2. Soit $\mathscr{F} = ((1,1,0),(0,1,1),(2,1,-1))$. Par des opérations élémentaires, on ne modifie pas le rang donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\mathscr{F}) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) && \text{car } C_3 = -C_2
\end{aligned}$$

La famille $((1,1,0),(0,1,1))$ est échelonnée en ses coordonnées et est donc libre dans $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, $\boxed{\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = 2}$.