Chapitre VI : Fonctions réelles

I Notations

I.1 Vocabulaire de base

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$. Une fonction f de U dans V met en relation tout élément $x \in U$ avec un unique élément $y \in V$, noté $y = f(x)$. La fonction f est alors notée :

$$\begin{aligned} f : U &\to V \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Par définition d'une fonction, l'assertion suivante est toujours vraie :

$$\forall x \in U,\ \exists ! y \in V, \quad y = f(x).$$

Vocabulaire Dans la relation $y = f(x)$,

- on dit que y est **l'image** de x,
- on dit que x est UN **antécédent** de y.

L'assertion précédente revient donc à dire que tout point de U admet une et une seule image.

Remarques 1 :

- Il n'est absolument pas interdit dans la définition d'une fonction $f : U \to V$ qu'un point $y \in V$ n'admette pas d'antécédent ou au contraire admette plusieurs antécédents.
- La définition rigoureuse d'une fonction réclame donc la donnée d'un espace de départ U, d'un espace d'arrivée V et de la donnée d'une unique image pour tout élément de U.

Exemple 2 : Parmi les fonctions suivantes lesquelles sont correctement définies ?

1. $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x). \end{aligned}$
2. $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to [1;+\infty[\\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$
3. $\begin{aligned} h :]-1;1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln\left(1-x^2\right). \end{aligned}$
4. $\begin{aligned} i :]-1;1[&\to]-\infty;1[\\ x &\mapsto \ln\left(1-x^2\right). \end{aligned}$
5. $\begin{aligned} j : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$
6. $\begin{aligned} j : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$

Notation
Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{F}(U,V)$ l'ensemble des fonctions de U dans V.

Remarque 3 : Puisque tout élément de l'espace d'arrivée n'a pas nécessairement d'antécédent, il est toujours possible d'étendre une fonction réelle $f : U \to V$, avec U et V deux parties de $\mathbb{R}$ à une fonction $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ en donnant les mêmes images aux éléments $x \in U$. Face à cette constatation, et sans besoin contraire, on travaillera avec des fonctions f dont l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarque 4 : ATTENTION, il ne faut pas confondre f et $f(x)$ qui sont deux objets mathématiques très différents. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est un unique réel alors que f désigne la fonction toute entière. Veillez à toujours rigoureusement utiliser la bonne notation.

I.2 Ensemble de définition, ensemble image et image réciproque

Il arrive bien souvent lors de la formalisation d'un problème concret ou dans la résolution d'un exercice, que ce soit à nous de déterminer l'ensemble U le plus grand possible sur lequel il nous est possible de définir une fonction f. En toute rigueur, il serait faux de parler de fonction sans avoir donné un ensemble de départ approprié, mais l'on se permettra cette confusion. La définition qui suit est rentre dans le cadre de cette confusion.

Définition I.1

Soit f une fonction de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ existe.

$$\mathscr{D}_f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 5 : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$ et $h : x \mapsto \ln\left(x^2+x+4\right)$.

Définition I.2

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit A un sous-ensemble de U et B un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- **L'image de** A, notée $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A :
$$f(A) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- **L'image réciproque de** B, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des antécédents de éléments de B :
$$f^{-1}(B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 6 : Vous remarquerez qu'il n'est pas nécessaire de définir la fonction réciproque (cf la fin du chapitre) pour définir l'image réciroque qui est définie pour tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'image réciproque peut être éventuellement l'ensemble vide.

Exemple 7 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+1$.

1. Déterminer l'image de $[5;+\infty[$ et $[-7;3]$.
2. Déterminer l'image réciproque de $[-2;2]$ et $[3;8]$.

I.3 Opérations sur les fonctions

Définition I.3

Soient U une partie de $\mathbb{R}$, $(f,g) \in \mathscr{F}(U,\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit alors les fonctions suivantes.

1. $f+g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
2. $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
3. $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
4. Si pour $x \in U$, $f(x) \neq 0$, on définit $\frac{1}{f} : U \to \mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
5. $|f| : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $|f|(x) = |f(x)|$.

Remarques 8 :

- La notation f^{-1} est réservée à la fonction réciproque (cf fin du chapitre) et ne peut pas être utilisée pour désigner la fonction inverse $\frac{1}{f}$.
- Il est important que les deux fonctions f et g soient définies sur un ensemble U commun aux deux pour construire une nouvelle fonction à partir de f et g. Par exemple définir la fonction $f+g$ à partir de $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ et $g : [4;+\infty[\to \mathbb{R}$ n'a aucun sens.

Définition I.4

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$, $g : U \to V$ et $f : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit **la composition** $f \circ g$ comme étant la fonction de U dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f \circ g \quad : \quad & U \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x)). \end{aligned}$$

Remarques 9 :

- Attention à ne pas confondre $f \times g$ avec $f \circ g$. La composition notamment n'est pas commutative. En toute généralité appliquer g puis f est différent que d'appliquer f puis g : $f \circ g \neq g \circ f$.

- La composition se lit de droite à gauche. Dans la composition $f \circ g$, on applique d'abord g à x, on obtient $g(x)$ puis on applique f à $g(x)$ pour obtenir $f(g(x))$.
- Les hypothèses sur les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas anodines. Il est possible que g soit définie de prime abord comme une fonction de $U \to \mathbb{R}$. Mais si f est définie sur un ensemble $V \subsetneq \mathbb{R}$, il est nécessaire de vérifier que $g(U) \subseteq V$, c'est-à-dire que pour tout $x \in U$, $g(x) \in V$, pour pouvoir appliquer $f : V \to \mathbb{R}$ à g et définir la composition $f \circ g$.

Exemple 10 : Soients $f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array}$. Montrer que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ existent et les déterminer.

Exemple 11 : Soients $f : \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$. Démontrer que la fonction $f \circ g$ existe et la déterminer. Pourquoi ne pouvons-nous pas définir la fonction $g \circ f$? Comment faut-il restreindre f pour pouvoir définir $g \circ f$?

II Graphe d'une fonction

On note $\mathscr{P}$ le plan euclidien munit d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

II.1 Définition

Définition II.1

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. **Le graphe** de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\Gamma_f = \mathscr{C}_f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On appelle encore graphe de f ou **courbe représentative** de f l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x, (f))$ pour $x \in U$.

Exemple 12 : Tracer le graphe de

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

II.2 Transformations remarquables du graphe

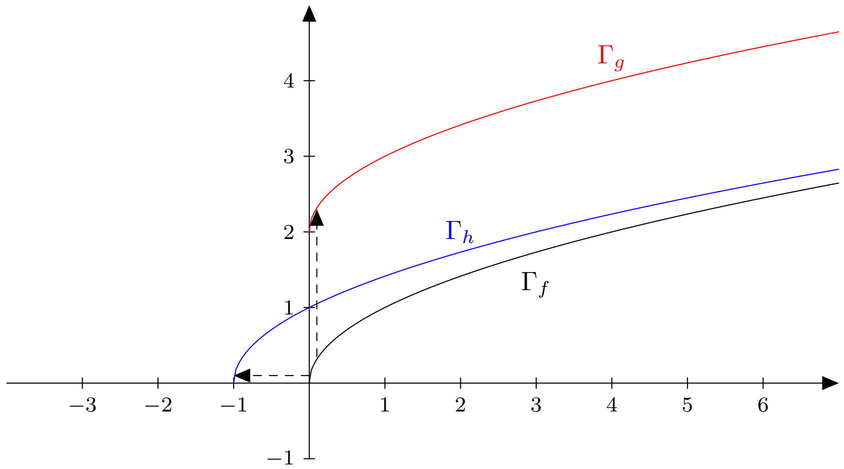
Proposition II.2 (translations)

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $g(x) = f(x) + a$. Alors le graphe de g, Γ_g est l'image du graphe de f, Γ_f par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
2. Soient $U_a = \{x - a \mid x \in U\}$ et $h : U_a \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U_a$ par $h(x) = f(x+a)$. Alors le graphe de h, Γ_h est l'image du graphe de f, Γ_f par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

Remarque 13 : Il est bon de savoir retrouver cette propriété à l'aide d'un dessin. Notamment ne vous laissez pas attraper par le signe $-$ dans la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

Exemple 14 : On pose $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. La fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x} + 2$ et la fonction $h : [-1; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-1; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x+1}$ ont leurs graphes donnés dans la figure suivante.



Proposition II.3 (symétries)

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $g(x) = a - f(x)$. Alors le graphe de g, Γ_g est l'image du graphe de f, Γ_f par la symétrie d'axe horizontal $y = \frac{a}{2}$.
2. Soient $U_a = \{x \in \mathbb{R} \mid a - x \in U\}$ et $h : U_a \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U_a$ par $h(x) = f(a-x)$. Alors le graphe de h, Γ_h est l'image du graphe de f, Γ_f par la symétrie d'axe vertical $x = \frac{a}{2}$.

Exemple 15 : A partir de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, tracer les graphes de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - x^2$ et celui de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = (2-x)^2$.

Proposition II.4 (dilatations)

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $g(x) = af(x)$. Alors le graphe de g, Γ_g est l'image du graphe de f, Γ_f par une dilatation verticale de coefficient a, c'est-à-dire par la transformation du plan suivante :
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, ay)\,. \end{aligned}$$
2. Soient $U_a = \{x \in \mathbb{R} \mid ax \in U\}$ et $h : U_a \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U_a$ par $h(x) = f(ax)$. Alors le graphe de h, Γ_h est l'image du graphe de f, Γ_f par une dilatation horizontale de coefficient $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire par la transformation du plan suivante :
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{x}{a}, y\right)\,. \end{aligned}$$

Démonstration. Exercice ! □

Remarque 16 : De même que pour $x \mapsto f(x+a)$ est obtenue par une translation de vecteur $-a\vec{i}$ et non $a\vec{i}$, ici la fonction $x \mapsto f(ax)$ est obtenue par une dilatation non pas de coefficient a mais de coefficient $\frac{1}{a}$.

Exemple 17 : On prend $U = [-\pi; \pi]$ et $f : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $f(x) = \sin(x)$. A partir de la fonction f, déterminer le graphe de la fonction $g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $g(x) = 2\sin(x)$ et celui de la fonction $h : U_2 = \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U_a$ par $h(x) = \sin(2x)$.

II.3 Relation d'ordre

Définition II.5

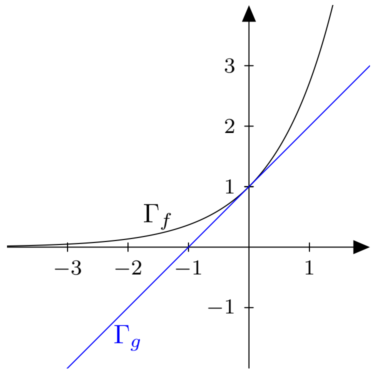
Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et f et g deux éléments de $\mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. On dit que f est **supérieure** à g sur U, noté $f \geqslant g$, si

....

Remarques 18 :

- On a des définitions analogues pour strictement supérieure, inférieure et strictement inférieure.
- Ne confondez pas $f \geqslant g$ qui vaut lorsque f est supérieure à g sur TOUT son ensemble de définition avec $f(x) \geqslant g(x)$ pour un x fixé, qui correspond à UN point de g qui est supérieur à un point de g.
- Graphiquement si $f \geqslant g$ sur U, alors Γ_f est « au-dessus » de Γ_g.
- La relation d'ordre $\leqslant$ n'est pas totale sur $\mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. Donner un exemple de couple de fonctions $(f, g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel qu'on n'ait ni $f \leqslant g$ ni $g \leqslant f$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 19 : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = x + 1$, on a $f \leqslant g$ sur $\mathbb{R}$.



III Propriétés

III.1 Parité

Définition III.1

Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ centré en 0, c'est-à-dire tel que $\forall x \in U$, $-x \in U$. Soit $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.

- On dit que f est **une fonction paire** si et seulement si

  ....

- On dit que f est **une fonction impaire** si et seulement si

  ....

Proposition III.2

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $U \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ centrée en a, c'est-à-dire telle que $\{x \in \mathbb{R}, x + a \in U\} = \{x \in \mathbb{R}, x - a \in U\}$. Notons $U_a = \{x \in \mathbb{R}, x + a \in U\}$ cet ensemble. Soit $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$

- Le graphe de f, Γ_f admet la droite $x = a$ pour axe symétrie si et seulement si

$$\forall x \in U_a, \quad f(a + x) = f(a - x).$$

- Le graphe de f, Γ_f admet le point (a, b) pour centre de symétrie si et seulement si

$$\forall x \in U_a, \quad \frac{f(x + a) + f(a - x)}{2} = b.$$

Notamment en prenant $a = b = 0$, on obtient le résultat suivant.

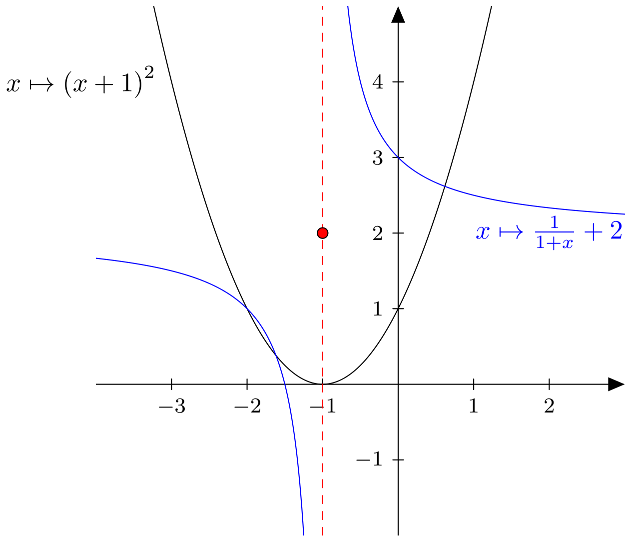
Cas particulier

Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ centré en 0, c'est-à-dire telle que $\forall x \in U$, $-x \in U$. Soit $f \in \mathscr{F}(U\mathbb{R})$.

- La fonction f est paire si et seulement si son graphe Γ_f est symétrique par rapport à la droite $x = 0$.
- La fonction f est impaire si et seulement si son graphe Γ_f est symétrique par rapport au point $(0; 0)$.

Exemples 20 :

- Les fonctions constantes, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$ sont des fonctions impaires sur leurs ensembles de définition.
- La fonction $x \mapsto (x+1)^2$ est symétrique sur $\mathbb{R}$ par rapport à la droite $x = -1$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x} + 2$ est symétrique sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par rapport au point $(-1, 2)$.



Exercice 21 : Etudier l'ensemble de définition et la parité de la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

III.2 Fonctions périodiques

Définition III.3

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est **périodique de période** T ou encore T-périodique si et seulement si

- pour tout $x \in U$, $x + T \in U$,
- pour tout $x \in U$, ...

Définition III.4

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. On dit que f est **périodique**, s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.

Exemple 22 : Les fonctions constantes sont T-périodiques pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, la fonction tangente est π-périodique.

Remarque 23 : Si f est T-périodique alors f est kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Proposition III.5

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. La fonction f est T-périodique si et seulement si son graphe Γ_f est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Remarque 24 : Pour construire le graphe d'une fonction f T-périodique, il suffit de connaitre son graphe sur un intervalle $[a; a+T]$ et de répéter ce motif sur les intervalles $[ka; (k+1)a]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 25 : Etudier si la fonction $x \mapsto x^2 \cos(x)$ est périodique ou non.

III.3 Monotonie

Définition III.6

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$ et I un intervalle inclus dans U.

- On dit que f est **croissante** sur I si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- On dit que f est **strictement croissante** sur I si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$x < y \quad \Rightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- On dit que f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- On dit que f est **strictement décroissante** sur I si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$x < y \quad \Rightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- On dit que f est **monotone** sur I si f est croissante ou décroissante sur I.

Proposition III.7

Soient $U \subseteq\in \mathbb{R}$, I un intervalle de U, $(f, g) \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.

1. Si f est (strictement) monotone sur I et $\lambda > 0$ alors λf a la même (stricte) monotonie que f sur I.
2. Si f est (strictement) monotone sur I et $\lambda < 0$ alors λf est (strictement) monotone sur I mais de monotonie opposée.
3. Si f et g sont monotones de même monotonie sur I alors $f + g$ est monotone de même monotonie sur I.
4. Si f est monotone sur I, et g strictement monotone sur I de même monotonie que f, alors $f + g$ est strictement monotone de même monotonie sur I.
5. Si f et g sont monotones de même monotonie sur I alors $f \circ g$ est croissante sur I.
6. Si f et g sont monotones de monotonies opposés sur I alors $f \circ g$ est décroissante sur I.

Remarque 26 : Il faut savoir retrouver et redémontrer chacune des assertions ci-dessus. Il faut également être conscient de ce que cette proposition n'affirme pas. Par exemple si f est croissante sur I et g décroissante sur I alors on ne peut rien dire a priori de $f + g$.

Exemple 27 : La fonction cosinus est croissante sur les intervalles $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et décroissante sur les intervalles $[2k\pi; (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 28 : Déterminer des conditions suffisantes sur f et g pour que fg soit croissante.

III.4 Majoration, minoration

Définition III.8

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.

- Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que M **majore** f sur U ou est **un majorant** de f sur U ou encore que f est **majorée par** M sur U si

  ....

- Soit $m \in \mathbb{R}$, on dit que m **minore** f sur U ou est **un minorant** de f sur U ou encore que f est **minorée par** m sur U si

  ....

- On dit que f est **majorée** sur U, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ qui majore f et on dit que f est **minorée** sur U, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ qui minore f.
- On dit que f est **bornée** sur U si f est majorée et minorée sur U.

Remarques 29 :

- La fonction f est majorée, respectivement minorée, sur U si et seulement si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in \mathbb{U}\}$ est une partie majorée, respectivement minorée.
- Si f est majorée, respectivement minorée, alors $-f$ est minorée, respectivement majorée.

Proposition III.9

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. La fonction f est bornée sur U si et seulement si

....

Démonstration. La preuve est semblable à la proposition analogue d'une partie bornée (cf chapitre précédent). □

Graphiquement, la fonction f est majorée si son graphe se situe « en dessous » d'une droite horizontale. Plus précisément, f est majorée par M si Γ_f se trouve en dessous de la droite d'équation $y = M$.
De la même façon, f est minorée par m si Γ_f se situe au dessus de la droite $y = m$.

Exemples 30 :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est minorée par 0 sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas majorée.
- La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas minorée.
- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

IV Continuité, dérivation

La continuité et la dérivation sont des notions que nous reverrons plus en détails dans un chapitre ultérieur après avoir défini rigoureusement la notion de limite. Les définitions données ici s'appuient donc sur la notion intuitive de limite.

IV.1 Continuité : rappels de terminal

Définition IV.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. La fonction f est **continue en** a si
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$
2. La fonction f est **continue sur** I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction f est continue en a.

Graphiquement, une fonction continue possède un graphe sans « saut », que le peut dessiner « sans lever le crayon ».