# Correction de l'exercice 18 TD20 (dénombrement)

**Enoncé** Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.

1. Combien y a t-il de tirages possibles ?
2. Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
3. Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

**Correction** Notons que bien que l'on ait 20 chaussures l'important sur le résultat sera le type de chaussure. Deux chaussures noires du pied droit sont indiscernables par exemple et donc ne compteront pas pour un résultat distinct. Nous avons donc six types de chaussures différentes :

$$\begin{aligned}
&NG : \text{« chaussure noire du pied droit »}\\
&ND : \text{« chaussure noire du pied gauche »}\\
&VG : \text{« chaussure verte du pied droit »}\\
&VD : \text{« chaussure verte du pied gauche »}\\
&RG : \text{« chaussure rouge du pied droit »}\\
&RD : \text{« chaussure rouge du pied gauche »}
\end{aligned}$$

Notez que chaque type est représenté par au moins deux chaussures (il existe deux chaussures rouges du pied droit, cinq chaussures noires du pied gauche etc). Donc dans les tirages il sera toujours possible d'avoir deux chaussures du même type. On tire simultanément deux chaussures et on note $E$ l'ensemble des tirages possibles et $T$ l'ensemble des types de chaussures possibles. On a $\text{Card }(T) = 6$.

1. Soit $N_{tot} = \text{Card }(E)$ le nombre total de tirages. Posons $N_1$ le nombre de tirage deux de chaussures de types distincts et $N_2$ le nombre de tirages de deux chaussures de même type. On a

$$N_{tot} = N_1 + N_2.$$

Or pour $N_1$, il suffit de prendre deux éléments de $T$, sans remise et simultanément. Donc $N_1 = \binom{6}{2}$. Pour $N_2$, il y a autant de couples de chaussures de même type que de types de chaussure. Donc $N_2 = \text{Card }(T) = 6$. Ainsi,

$$N_{tot} = \binom{6}{2} + 6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} + 6 = \frac{5\times 6}{2!} + 6 = 15 + 6 = 21.$$

*Méthode de Jérémy et Gustave :* On partitionne $E$ de la façon suivante, $E = E_{NG} \sqcup E_{\overline{NG}}$ où $E_{NG}$ est l'ensemble des tirages contenant une chaussure de type $NG$ et $E_{\overline{NG}}$ l'ensemble des tirages qui ne contiennent pas $NG$. Puis on continue en notant $E_{\overline{NG},ND}$ l'ensemble des tirages contenant $ND$ mais pas $NG$ et $E_{\overline{NG},\overline{ND}}$ etc. On a alors

$$E = E_{NG} \sqcup E_{\overline{NG},ND} \sqcup E_{\overline{NG},\overline{ND},VG} \sqcup E_{\overline{NG},\overline{ND},\overline{VG},VD} \sqcup E_{\overline{NG},\overline{ND},\overline{VG},\overline{VD},RG} \sqcup E_{\overline{NG},\overline{ND},\overline{VG},\overline{VD},\overline{RG},RD}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\text{Card }(E) = \text{Card }(E_{NG}) &+ \text{Card }\left(E_{\overline{NG},ND}\right) + \text{Card }\left(E_{\overline{NG},\overline{ND},VG}\right) + \text{Card }\left(E_{\overline{NG},\overline{ND},\overline{VG},VD}\right)\\
&+ \text{Card }\left(E_{\overline{NG},\overline{ND},\overline{VG},\overline{VD},RG}\right) + \text{Card }\left(E_{\overline{NG},\overline{ND},\overline{VG},\overline{VD},\overline{RG},RD}\right).\end{aligned}$$

Or, on note que

$$E_{NG} = \{(NG,NG)\,,\ (NG,ND)\,,\ (NG,VG)\,,\ (NG,VD)\,,\ (NG,RG)\,,\ (NG,RD)\}$$

et donc $\text{Card }(E_{NG}) = 6$. De plus

$$E_{\overline{NG},ND} = \{(ND,ND)\,,\ (ND,VG)\,,\ (ND,VD)\,,\ (ND,RG)\,,\ (ND,RD)\}\,.$$

et donc $\text{Card }\left(E_{\overline{NG},ND}\right) = 5$. On procède de même pour les autres ensembles. On obtient alors le même résultat

$$\text{Card }(E) = 6+5+4+3+2+1 = \frac{6\times 7}{2} = 21.$$

2. Notons $F$ l'ensemble des tirages pour lesquels les deux chaussures sont de la même couleur. Pour tirer deux chaussures de même couleur, il faut tirer la couleur puis compter à l'intérieur de l'ensemble des chaussures de la couleur choisie combien de tirages sont possibles. On a 3 couleurs distinctes et parmi les chaussures de même couleurs on a deux tirages possibles : les deux chaussures sont du même pied, le deux chaussures sont de pied différent. Ainsi :
$$\text{Card } (F) = 3 \times 2 = 6.$$
3. On souhaite compter le nombre de tirages de chaussures de pieds différents. Soit $G$ l'ensemble des tirages pour lesquels les deux chaussures sont de pied différent. On découpe $G$ en deux ensembles : l'ensemble $G \cap F$ des tirages pour lesquels les deux chaussures sont de pied différent mais de même couleur et l'ensemble $G \setminus F$ des tirages pour lesquels les deux chaussures sont de pied différent et de couleur différente. Pour $G \cap F$, il nous suffit de choisir une couleur (3 choix) et alors un seul tirage est possible : on prend les deux chaussures de même couleur et de pied différent. Par exemple, si la couleur est noire alors le seul tirage est $(NG, ND)$. Donc
$$\text{Card } (G \cap F) = 3.$$
Pour dénombrer $G \setminus F$ il faut choisir deux couleurs distinctes parmi les trois disponible puis dans ces deux couleurs on a deux tirages possibles pour que les pieds soient distincts : (couleur 1 et pied gauche, couleur 2 et pied droit) ou (couleur 1 et pied droit, couleur 2 et pied gauche). Ainsi,
$$\text{Card } (G \setminus F) = \binom{3}{2} \times 2 = 3 \times 2 = 6.$$
On conclut donc
$$\text{Card } (G) = \text{Card } (G \cap F) + \text{Card } (G \setminus F) = 3 + 6 = 9.$$
4. Pour reconstituer une vraie paire de chaussures, il faut prendre prendre deux chaussures de même couleur et de pied distinct, autrement dit, avec les notations de la question précédente il s'agit de dénombrer $F \cap G$. Donc
$$\text{Card } (F \cap G) = 3.$$