Interrogation 13 d'entrainement
Limite, continuité

1. **Savoir énoncer une limite.** Dans chacun des cas suivant donner la définition rigoureuse.

   1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
   2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.
   3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$
   4. La fonction sh est continue en 3.
   5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0.

2. **Calculer une limite.** Calculer les limites suivantes

   1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{(1-\mathrm{e}^x)(1-\cos(x))}{3x^3+2x^4}$
   2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1+\tan(x))^{\frac{1}{\sin(x)}}$
   3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2}{(1+x)^5-1}$
   4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sin^2(3x)}{\cos(5x)-1}$
   5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$

3. **Appliquer un théorème du cours.** Justifier dans chaque cas l'existence d'une solution.
   1. $\ln(x) = x-3$ sur $[1;8]$. *On rappelle que* $\ln(2)<1$.
   2. $\frac{x^4+2x^3-x-1}{8x^2-2x+1} = 1$ sur $[0;+\infty[$.
   3. $\tan(2x) = x+1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.
   4. $\ln(1+x^n) = -x+1$, $n\in\mathbb{N}$ sur $[0;1]$.
   5. $x^n = x+1$, $n \geqslant 2$ sur $[1;+\infty[$.

4. **Calculer une image directe.** Dans chaque cas, sans calcul préciser la nature de l'ensemble demandé lorsque c'est possible, puis le calculer.
   1. Pour $f : x\mapsto (x+3)^2-4$, l'ensemble $f([-5;1])$.
   2. Pour $f : x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$, l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
   3. Pour $f : x\mapsto \lfloor x\rfloor$, l'ensemble $f\left(\left[-3;\frac{5}{2}\right]\right)$.
   4. Pour $f : x\mapsto \tan(2x)$, l'ensemble $f\left(\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\right)$.
   5. Pour $f : x\mapsto \frac{1}{5x^2+3x+2}$, l'ensemble $f([0;2[)$.

5. **Calcul d'une limite par encadrement.** Calculer en justifiant soigneusement chacune des limites suivantes.

   1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-\sin(x)}$.
   3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

6. **Application de la caractérisation séquentielle de la limite.**
   1. Soient $u_0\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n+2$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{u_n^5}$.
   2. Soient $u_0\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\arcsin\left(u_n+\frac{1}{2}\right)}{u_n+\frac{1}{2}}$.
   3. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$, $u_0\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Que peut-on en déduire pour f ?

7. **DL d'un quotient.** Déterminer un développement limité en 0 des fonctions suivantes
   1. $x\mapsto \frac{1}{\cos(2x)+\sin(3x)}$ à l'ordre 3.
   2. $x\mapsto \frac{x}{3+\mathrm{e}^{-x}}$ à l'ordre 3.
   3. $x\mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{1-x}}$ à l'ordre 4.

Question 1.

1. $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \left(x \geqslant A \ \Rightarrow\ \frac{e^x}{x} \geqslant M\right)$.
2. $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \left]0;\eta\right],\ \ln(x) \leqslant M$.
3. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \leqslant M,\ \left|\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \left[3-\eta;3+\eta\right],\ |\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(3)| \leqslant \varepsilon$.
5. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \left[0;\eta\right],\ \sqrt{x} \leqslant \varepsilon$.

Question 2.

1. Puisque $1 - e^x \underset{x\to 0}{\sim} -x$, $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $3x^3 + 2x^4 \underset{x\to 0}{\sim} 3x^3$. On en déduit que
$$\frac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{3x^3+2x^4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x \times \frac{x^2}{2}}{3x^3} = -\frac{1}{6}.$$
D'où $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{3x^3+2x^4} = -\frac{1}{6}$.

2. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$, on a
$$(1+\tan(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} = e^{\frac{1}{\sin(x)}\ln(1+\tan(x))}.$$
Or $u = \tan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $\ln(1+\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. D'autre part, $\frac{1}{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$. Donc
$$\frac{1}{\sin(x)}\ln(1+\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim} 1$$
i.e. $\frac{1}{\sin(x)}\ln(1+\tan(x)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. La fonction exponentielle est continue en 1, donc
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1+\tan(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} = e^1.$$

3. On a d'une part, $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et donc $(e^x-1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. D'autre part $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$. Donc pour $\alpha = 5$, on obtient également que $(1+x)^5 - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 5x$. Ainsi
$$\frac{(e^x-1)^2}{(1+x)^5-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{5x} = \frac{x}{5} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{(e^x-1)^2}{(1+x)^5-1} = 0$.

4. On sait que $\sin(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$ et $\cos(5x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{25x^2}{2}$. Donc
$$\frac{\sin^2(3x)}{\cos(5x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{9x^2}{-\frac{25x^2}{2}} = -\frac{18}{25}.$$
Autrement dit, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin^2(3x)}{\cos(5x)-1} = -\frac{18}{25}$.

5. On a $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to +\infty}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc $x + x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x + x + o(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$. D'autre part quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et donc $\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$. Donc
$$\ln\left(1+\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$
Ainsi,
$$\frac{x + x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = 2x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x + x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = +\infty$.

Question 3.

1. On pose $f : x \mapsto \ln(x) - x + 3$ qui est définie et continue sur $]0;+\infty[$ et donc sur $[1;8]$. De plus $f(0) = 3 > 0$ et $f(8) = \ln(8) - 5 = 3\ln(2) - 5 < 3 - 5 = -2 < 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur $[1;8]$ et l'équation $\ln(x) = x - 3$ admet au moins une solution sur $[1;8]$.
2. Posons $f : x \mapsto \frac{x^4+2x^3-x-1}{8x^2-2x+1} - 1$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car le polynôme $8x^2 - 2x + 1$ a un discriminant négatif). De plus $f(0) = \frac{-1}{1} - 1 = -2 < 0$ et $f(2) = \frac{16+16-2-1}{32-4+1} - 1 = \frac{29}{29} - 1 = f(0)$. Bon cette équation possède alors une solution évidente qui est 2. Pas très intéressante finalement cette question...
3. Posons $f : x \mapsto \tan(2x) - x - 1$ qui est bien définie et continue sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$. De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - 1 > \sqrt{3} - \frac{1}{2} - 1 = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$. Or $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < 3$. Donc $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3} - \frac{3}{2} > 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ et donc l'équation $\tan(2x) = x - 1$ admet au moins une solution sur $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\subseteq \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $f_n : \ln(1 + x^n) + x - 1$ qui est définie et même dérivable sur $]-1;+\infty[$. De plus, on a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \ln(2) > 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x) = 0$ et donc l'équation $\ln(1 + x^n) = -x + 1$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Posons $f_n : x^n - x - 1$ qui est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $f_n(1) = -1 < 0$ et $f_n(2) = 2^n - 3 \geqslant 2^2 - 3 = 1 > 0$ car $n \geqslant 2$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x) = 0$ et donc l'équation $x^n = x + 1$ admet au moins une solution dans $[1;2] \subseteq [1;+\infty[$.

Question 4.

1. La fonction f est continue sur $[-5;1]$. Donc l'ensemble $f([-5;1])$ est un segment. Après calcul, on a $f([-5;1]) = [-4;12]$.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble $f(\mathbb{R})$ est un intervalle. Après calcul, on a $f(\mathbb{R}) = [0;1]$.
3. La fonction f n'est pas continue sur $\left[-3;\frac{5}{2}\right]$ on ne peut donc rien dire a priori de $f\left(\left[-3;\frac{5}{2}\right]\right)$. On a $f\left(\left[-3;\frac{5}{2}\right]\right) = \{-3;-2;-1;0;1;2\}$.
4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble $f\left(\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\right)$ est un intervalle. Après calcul, on a $f\left(\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\right) = \mathbb{R}$.
5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble $f([0;2[)$ est un intervalle. Après calcul, on a $f([0;2[) = \left[\frac{1}{2};\frac{1}{28}\right[$.

Question 5.

1. On a pour tout $x \neq 0$, $-x \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - \sin(x) \geqslant x - 1$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-\sin(x)} = +\infty$.
3. On a pour tout $x \neq 0$, $1 - x \leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 1$.

Question 6.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{u_n^5} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\arcsin\left(u_n + \frac{1}{2}\right)}{u_n + \frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{3}$.
3. $f(0) = 0$.

Question 7.

1. $\frac{1}{\cos(2x)+\sin(3x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - 3x + 11x^2 - \frac{69}{2}x^3 + o\left(x^3\right)$.
2. $\frac{x}{3+\mathrm{e}^{-x}} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{64} + o\left(x^3\right)$.
3. $\frac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{1-x}} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{13}{24}x^3 + \frac{19}{48}x^4 + o\left(x^4\right)$.