Interrogation 14
Dérivabilité et suites

Nom :

Prénom :

Note :

1. Montrer que la fonction arctan est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(5x+2)$ est lipschitzienne sur $[0;1]$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est 2-lipschitzienne sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. En admettant que la fonction $f : \begin{cases} x\,|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$, démontrer qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

5. En admettant que la fonction $f : \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$, démontrer qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

....

....

....

....

....

6. En admettant que la fonction $f : \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $]-1;+\infty[$, démontrer qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

....

....

....

....

....

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \geqslant 5u_{n+1} - 2u_n + 1$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur l ?

....

....

....

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leqslant 3u_n - 5$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur l ?

....

....

....

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = e^{u_n}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}_+^*$. Que peut-on en déduire pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

....

....

....

10. Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 1$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n en fonction de n.

....

....

....

....

11. Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 2$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n en fonction de n.

....

....

....

....

....

12. Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4u_{n+1} + 3u_n + 21 = 0$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n en fonction de n.

....

....

....

....

....

13. Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n en fonction de n.

....

....

....

....

....

14. Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n en fonction de n.

....

....

....

....

....

15. Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n en fonction de n.

....

....

....

....

....