Interrogation 16 d'entrainement
Polynômes

1. **Enoncer un théorème du cours.**
   1. Donner une relation entre $\deg(P)$, $\deg(Q)$ et $\deg(P+Q)$.
   2. Enoncer le théorème de la division euclidienne.
   3. Donner la définition de P'.
   4. Enoncer la formule de Taylor pour $P(X+h)$ ou pour $P(X)$.
   5. Enoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
   6. Donner les deux relations entre les racines de P et ses coefficients.
2. **Multiplicité d'une racine.**
   1. Déterminer la multiplicité de 1 pour le polynôme $5X^5 - 13X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 7X - 3$.
   2. Déterminer la multiplicité de -1 pour le polynôme $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.
   3. Déterminer la multiplicité de 2 pour le polynôme $(X-2)^2\left(X^2 - 13X + 22\right)$.
   4. Déterminer la multiplicité de j pour le polynôme $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$.
   5. Déterminer la multiplicité de -1 pour le polynôme $X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$.
3. **Factoriser $\mathbb{C}[X]$.**
   1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 + (7-2i)X^2 - (1+14i)X - 7$.
   2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 16$.
   3. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 + 6X^2 + 6X + 5$.
      Indication : on pourra remarquer que j est une racine de P.
   4. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 + X^2 + 5X - 7$.
   5. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 7X^2 - 18$.
4. **Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.**
   1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 11X^3 + 27X^2 + 11X - 28$.
   2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 - 3X^5 + 5X^4$.
   3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 4X - 4$.
      Remarquer que i est une racine de P.
   4. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$.
   5. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^3 - \left(1+2\sqrt{2}\right)X^2 + 2\left(1+\sqrt{2}\right)X - 2$.

5. **Savoir faire une intégration par parties.**
   1. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
   2. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin(t)\,\mathrm{d}t$.
   3. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t$.
   4. Calculer pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
   5. Calculer pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 2.

1. Soit $P = 5X^5 - 13X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 7X - 3$. On note que $P(1) = 5 - 13 + 12 - 8 + 7 - 3 = 5 - 1 - 1 - 3 = 0$. Donc 1 est une racine de P. De plus
$$P' = 25X^4 - 52X^3 + 36X^2 - 16X + 7.$$
Or $P'(1) = 25 - 52 + 36 - 16 + 7 = -27 + 20 + 7 = 0$. De plus
$$P'' = 100X^3 - 156X^2 + 72X - 16$$
et $P''(1) = 100 - 156 + 72 - 16 = -56 + 56 = 0$. On continue :
$$P''' = 300X^2 - 312X^2 + 72$$
et $P'''(1) = 300 - 312 + 72 = 60 \neq 0$. Au bilan, $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. Donc 1 est une racine d'ordre 3 de P.
2. Puisque $P = (X+1)^3$, on en déduit que -1 est une racine de P de multiplicité 3.
3. Soit $P = (X-2)^2\left(X^2 - 13X + 22\right)$. Il est clair que 2 est une racine de multiplicité au moins 2. De plus pour $Q = X^2 - 13X + 22$, on a $Q(2) = 4 - 26 + 22 = 0$, donc 2 est aussi racine de Q et $Q = (X-2)(X-11)$. Ainsi $P = (X-2)^3(X-11)$. Ainsi 2 est une racine de multiplicité 3 de P.
4. Soit $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Commençons par rappeler les deux relations fondamentales pour j. Le complexe j étant une racine 3-ième de l'unité on a $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. Ainsi
$$P(j) = j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 = j + 2 + 3j^2 + 2j + 1 = 3\left(j^2 + j + 1\right) = 0.$$
De plus $P' = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 2$. Donc $P'(j) = 4j^3 + 6j^2 + 6j + 2 = 4\left(j^2 + j + 1\right) = 0$. Et encore $P'' = 12X^2 + 12X + 6$ et donc $P''(j) = 12j^2 + 12j + 6 = -12 + 6 = -6 \neq 0$. Conclusion, $P(j) = P'(j) = 0$ et $P''(j) \neq 0$. Donc j est une racine double de P.
NB : lorsque l'on sait que j est une racine de multiplicité d'au moins deux, puisque P est à coefficients réels, on en déduit que $j^2 = \overline{j}$ est aussi une racine de multiplicité d'au moins deux de P. Or $\deg(P) = 4 = 2 + 2$. Donc j et j^2 sont deux racines doubles de P.
5. Soit $P = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$. On a $P(-1) = -1 + 6 - 10 - 20 + 51 - 26 = 0$. De plus
$$P' = 5X^4 + 24X^3 + 30X^2 - 40X - 51$$
et $P'(-1) = 5 - 24 + 30 + 40 - 51 = 0$. De surcroit $P'' = 20X^3 + 72X^2 + 60X - 40$ et $P''(-1) = -20 + 72 - 60 - 40 = -48 \neq 0$. Donc $P(-1) = P'(-1) = 0$ et $P''(-1) \neq 0$. Donc -1 est une racine double de P.

Question 3.

1. Soit $P = X^3 + (7 - 2i)X^2 - (1 + 14i)X - 7$. On note que i est une racine de P :
$$P(i) - i - 7 + 2i - i + 14 - 7 = 0.$$
Donc $P = (X - i)\left(X^2 + (7 - i)X - 7i\right)$. On note à nouveau que i est une racine de $Q = X^2 + (7 - i)X - 7i$ en effet $Q(i) = -1 + 7i + 1 - 7i = 0$. Donc $P = (X - i)^2(X + 7)$.
2. Soit $P = X^4 + 16$. On a
$$P = \left(X - \sqrt{2}(1+i)\right)\left(X - \sqrt{2}(1-i)\right)\left(X + \sqrt{2}(1-i)\right)\left(X + \sqrt{2}(1+i)\right).$$
3. Soit $P = X^3 + 6X^2 + 6X + 5$. On a $P(j) = 1 + 6j^2 + 6j + 5 = 6\left(j^2 + j + 1\right) = 0$. Donc j est une racine de P. Or P est à coefficients réels, donc j^2 est aussi une racine de P. Or $(X - j)\left(X - j^2\right) = X^2 - 2\mathrm{Re}(j)X + |j| = X^2 + X + 1$. Ainsi,
$$P = \left(X^2 + X + 1\right)(X + 5) = (X - j)\left(X - j^2\right)(X + 5).$$
4. Soit $P = X^3 + X^2 + 5X - 7$, alors
$$P = (X - 1)\left(X + 1 + \sqrt{6}i\right)\left(X + 1 - \sqrt{6}i\right).$$
5. Soit $P = X^4 + 7X^2 - 18$, alors
$$P = \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)(X - 3i)(X + 3i).$$

Question 4.

1. Soit $P = X^4 - 11X^3 + 27X^2 + 11X - 28$. On note que 1 est une racine de P car $P(1) = 1 - 11 + 27 + 11 - 28 = 0$. Donc
$$P = (X-1)\left(X^3 - 10X^2 + 17X + 28\right).$$
On note alors que -1 est une racine de $Q = X^3 - 10X^2 + 17X + 28$ en effet $Q(-1) = -1 - 10 - 17 + 28 = 0$. Donc
$$P = (X-1)(X+1)\left(X^2 - 11X + 28\right).$$
Soit Δ le discriminant de $X^2 - 11X + 28$, on a $\Delta = 121 - 112 = 9$. Donc les deux dernières racines de P sont $\frac{11-3}{2} = 4$ et $\frac{11+3}{2} = 7$. Finalement
$$P = (X-1)(X+1)(X-4)(X-7).$$
2. Soit $P = X^6 - 3X^5 + 5X^4$, alors $P = \left(X^2 - 3X + 5\right)X^4$ et $X^2 - 3X + 5$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant est négatif.
3. Soit $P = X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 4X - 4$, alors $P = \left(X^2 + 1\right)\left(X + 2 + 2\sqrt{2}\right)\left(X + 2 - 2\sqrt{2}\right)$.
4. Soit $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$, alors $P = \left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)(X+1)$.
5. Soit $P = X^3 - \left(1 + 2\sqrt{2}\right)X^2 + 2\left(1 + \sqrt{2}\right)X - 2$, alors $P = (X-1)\left(X - \sqrt{2}\right)^2$.

Question 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on veut calculer $\displaystyle\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u(t) = -\cos(t) \\ v(t) = t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u'(t) = \sin(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$. Donc par une intégration par parties,
$$\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)t]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = -x\cos(x) + [\sin(t)]_{t=0}^{t=x} = -x\cos(x) + \sin(x).$$
2. On a $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_0^x \ln\left(1 + t^2\right)\mathrm{d}t = x\ln\left(1 + x^2\right) - 2x + 2\arctan(x)$.
4. Soit $x > 0$, on pose $I = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. On a $I = \ln^2(x) - I$. Donc $I = \frac{\ln^2(x)}{2}$.
5. Soit $x > 0$, on a $\displaystyle\int_1^x \ln^2(t)\,\mathrm{d}t = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x - 2$.