Interrogation 17 d'entrainement
Espaces Vectoriels

1. **Déterminer si l'ensemble est un espace vectoriel.**
   1.1 L'ensemble $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée } \right\}$ est-il un espace vectoriel ?
   1.2 L'ensemble $E = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est minorée } \}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
   1.3 L'ensemble $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2nu_n \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
   1.4 L'ensemble $E = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
   1.5 L'ensemble $E = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0 \}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. **Déterminer une famille génératrice.**
   2.1 Déterminer une famille génératrice de $E = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 = 2x-y+2z+t \right\}$.
   2.2 Déterminer une famille génératrice de $E = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X|P \}$.
   2.3 Déterminer une famille génératrice de $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 5f = 0 \right\}$.
   2.4 Déterminer une famille génératrice de $E = \left\{ M = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a_{1,1} = a_{2,2} \right\}$.
   2.5 Déterminer une famille génératrice de $E = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \}$ où E est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. **Montrer que deux espaces sont en somme directe.**
   3.1 Montrer que $F = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R} \}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ sont en somme directe.
   3.2 Montrer que $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ et $G = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont en somme directe.
   3.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des matrices symétriques, respectivement anti-symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont en somme directe.
   3.4 Montrer que $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0 \}$ et $G = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \}$ sont en somme directe.
   3.5 Montrer que $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 7f = 0 \right\}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}$ sont en somme directe.
4. **Famille génératrice.**
   4.1 Montrer que la famille $\mathscr{F} = \left(1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3\right)$ est génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$.
   4.2 Montrer que la famille $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$.
   4.3 Montrer que la famille $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.
   4.4 Montrer que la famille $\mathscr{F} = (x \mapsto 1, x \mapsto \cos(2x))$ est génératrice dans $\operatorname{Vect}\left(x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto \sin^2(x)\right)$.
   4.5 Soit E un espace vectoriel et (v_1, v_2, v_3) une famille génératrice de E. Montrer que la famille $\mathscr{F} = (3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3)$ est génératrice dans E.

5. **Fonctions circulaires réciproques.**

   5.1 Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \cos(2\arccos(x))$ puis simplifier cette fonction.

   5.2 Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \cos(2\arcsin(x))$ puis simplifier cette fonction.

   5.3 Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sin(\arccos(x))$ puis simplifier cette fonction.

   5.4 Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sin(2\arctan(x))$ puis simplifier cette fonction.

   5.5 Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \tan(2\arcsin(x))$ puis simplifier cette fonction.

Question 1.

1.1 *Réponse rédigée :* Soit $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée } \right\}$.

- L'ensemble E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est lui-même un espace vectoriel.
- La suite nulle est bornée donc $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E. Puisque u est bornée, il existe $M_1 > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M_1$. De même v est bornée donc il existe $M_2 > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M_2$. Par l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\lambda\, u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda\, u_n| + |\mu v_n| = |\lambda|\, |u_n| + |\mu|\, |v_n| \leqslant |\lambda|\, M_1 + |\mu|\, M_2.$$

Par conséquent la suite $\lambda\, u + \mu v$ est bornée par $M = \lambda\, M_1 + \mu M_2$ et est donc un élément de E.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et est donc un espace vectoriel.

1.2 Non car E n'est pas stable par multiplication externe : $u = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E car minorée par 0 mais $-1 \cdot u = (-n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dans E.

1.3 Oui (même si ce n'est pas un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à cause du coefficient n devant u_n).

1.4 Oui (par linéarité de l'intégrale).

1.5 Oui (par linéarité de la trace).

Question 2.

2.1 *Réponse rédigée :* Soit $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 = 2x - y + 2z + t \right\}$. Soit

$$(\mathcal{S}) : \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

le système d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 - 3y + 0 + t = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -y - z = -z + \frac{t}{3} \\ y = -\frac{t}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \left(-z + \frac{t}{3}, -\frac{t}{3}, z, t \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ -z\,(1, 0, -1, 0) + \frac{t}{3}\,(1, -1, 0, 3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc $(1, 0, -1, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$ est une famille génératrice de E.

2.2 $E = \operatorname{Vect}\left(X, X^2, X^3\right)$.

2.3 $E = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{3t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right) \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{3t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right) \end{array} \right)$.

2.4 $E = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

2.5 $E = \operatorname{Vect}(1 + i)$.

Question 3.

3.1 *Réponse rédigée :* Soient $F = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R} \}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $f \in F \cap G$ alors $F \in F$ et $f \in G$. Puisque $f \in F$, il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$. En particulier

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 c\,\mathrm{d}t = c.$$

Or $f \in G$, donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et donc $c = 0$. Par conséquent la fonction f est la fonction nulle. Donc $F \cap G \subseteq \{0\}$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on en déduit que $F \cap G = \{0\}$. Donc par la caractérisation de la somme directe, on en déduit que F et G sont en somme directe.

3.2 Si $u \in F \cap G$ alors $u = x\,(1,0,1) + y\,(1,2,3) = z\,(0,1,0)$ et donc

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2y = z \\ x + 3y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0.$$

Donc $F \cap G = \{0\}$.

3.3 Si $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{A}_n \cap \mathscr{S}_n$ alors pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} = a_{ji} = -a_{ji}$ et donc $a_{ji} = 0$ et ainsi $a_{ij} = 0$. Donc $M = 0_n$ puis $\mathscr{A}_n \cap \mathscr{S}_n = \{0_n\}$.

3.4 Si $P \in F \cap G$, alors P est un polynôme de degré 3 ayant deux racines de multiplicité au moins 2. Or $2 + 2 > 3$ et donc $P = 0$.

3.5 $f \in F \cap G$ si et seulement si f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'' + 3f' + 7f = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0. \end{cases}$$

Or la fonction nulle est une solution et d'après le cours, un problème de Cauchy admet une unique solution. Donc si $f \in F \cap G$ alors f est la fonction nulle i.e. $F \cap G = \{0\}$.

Question 4.

4.1 *Réponse rédigée :* Soit $\mathscr{F} = \left(1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\right)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$. En effectuant des opérations élémentaires sur la famille $\mathscr{F}$, on ne change pas F, donc

$$\begin{aligned} F = \mathrm{Vect}\left(1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\right) &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X - X^2, X^2 - X^3\right) && C_2 \leftarrow -C_2 + C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, X^2 - X^3\right) && C_3 \leftarrow -C_3 + C_2 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, X^3\right) && C_4 \leftarrow -C_4 + C_3 \end{aligned}$$

Or on sait que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, X^3\right)$ et donc $F = \mathbb{R}_3[X]$, autrement dit $\mathscr{F}$ est génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$.

4.2 Soit $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) && C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

4.3 Soit $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) && C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) && C_3 \leftarrow -\frac{1}{2}C_3 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) && \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{matrix} \\
&= \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

4.4 Soient $\mathscr{F} = (x \mapsto 1, x \mapsto \cos(2x))$ et $E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto \sin^2(x)\right)$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, on a bien que $\mathscr{F}$ est une famille d'élément de E. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ donc $\cos^2 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et $\sin^2 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et par conséquent, $E \subseteq \mathrm{Vect}(F) \subseteq E$ donc $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

4.5 On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3) &= \mathrm{Vect}(3v_1, v_3, v_2) && C_1 \leftarrow C_1 - C_2,\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\
&= \mathrm{Vect}(v_1, v_3, v_2) && C_1 \leftarrow \frac{1}{3}C_1 \\
&= \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\
&= E.
\end{aligned}$$

Question 5.

5.1 *Réponse rédigée :* Soit $f : x \mapsto \cos(2\arccos(x))$. La fonction arccos est définie sur $[-1;1]$ et la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc par composée, f est définie sur $[-1;1]$ et pour tout $x \in [-1;1]$, on a

$$f(x) = \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1.$$

5.2 $\mathscr{D}_f = [-1;1]$ et pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = 1 - 2x^2$.

5.3 $\mathscr{D}_f = [-1;1]$ et pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (on n'oubliera pas de préciser que le sinus est positif sur $[0;\pi] = \arccos([-1;1])$).

5.4 $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

5.5 $\mathscr{D}_f = \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$ et pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.