# Interrogation 18 d'entrainement
# Espaces vectoriels de dimension finie

1. **Enoncer un résultat du cours.**
   1.1 Donner la définition puis la caractérisation de deux espaces en somme directe/supplémentaires.
   1.2 Définir une famille liée, libre, génératrice, base.
   1.3 Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
   1.4 Enoncer le théorème de la base extraite, le théorème de la base incomplète.
   1.5 Définir le rang d'une famille, énoncer la formule de Grassman. Caractériser avec la dimension le fait que deux espaces vectoriels soient supplémentaires.
2. **Déterminer la dimension d'un espace vectoriel.**
   2.1 Déterminer la dimension de $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{array} \right\}$.
   2.2 Déterminer la dimension de $E = \mathrm{Vect}\left((3, 0, 1), (2, -1, -1), (1, 1, 2)\right)$.
   2.3 Déterminer la dimension de $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.
   2.4 Déterminer la dimension de $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0 \right\}$.
   2.5 Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille $3 \times 3$.
3. **Calculer le rang d'une famille de vecteurs.**
   3.1 Soit $\mathscr{F} = \left(3 + X + X^2, 5 - 2X^2, 3X + X^2, 1 - X + X^2\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   3.2 Soit $\mathscr{F} = ((1, 0, -2), (4, 2, 1), (-1, 3, 1), (0, 3, 3))$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   3.3 Soient $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif et $E = \mathscr{F}([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R})$. On considère dans $E$ la famille $\mathscr{F} = \left(x \mapsto \cos(x), x \mapsto x\cos(x), x \mapsto x^2\cos(x)\right)$. Montrer que $\mathscr{F}$ est libre et en déduire son rang.
   3.4 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = 2$ et $\mathscr{F} = \left(P, P', P'', P^{(3)}, P^{(4)}\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   3.5 Calculer le rang de $\mathscr{F} = \left((2)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}, (5 + 2n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
4. **Montrer que deux espaces sont supplémentaires à l'aide de la dimension.**
   4.1 Montrer que $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0 \}$ et $G = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0 \}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   4.2 Montrer que $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x + 2y - z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(0, 0, -1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   4.3 Montrer que $F = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0 \}$ et $G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   4.4 Montrer que $F = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (0, 4, 0), (1, -2, 1)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 0, 0)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   4.5 Montrer que $F = \mathbb{R}_3[X]$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X^5, X + X^4\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$.
5. **Dérivation et intégration des développements limités.**
   5.1 A l'aide du théorème de dérivation des développements limités, établir le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 0 à partir de celui de $x \mapsto \ln(1 + x)$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.
   5.2 A l'aide du théorème d'intégration des développements limités, établir le développement limité de $x \mapsto \arccos(x)$ en 0 à l'ordre 5.
   5.3 A l'aide du théorème de dérivation des développements limités, établir le développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.
   5.4 A l'aide du théorème d'intégration des développements limités, établir le développement limité de $x \mapsto \arctan(x)$ en 0 à l'ordre $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
   5.5 A l'aide du théorème de dérivation des développements limités, établir le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ en 0 à l'ordre $n$.

**Question 2.**

2.1 *Réponse rédigée :* Soit $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+2y+z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{array} \right\}$. On a les égalités suivantes :

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+2y+z=0 \\ -7y-4z=0 \end{array} \right\} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x=-2y-z \\ y=-\frac{4}{7}z \end{array} \right\}$$

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x=\frac{z}{7} \\ y=-\frac{4}{7}z \end{array} \right\}$$

$$E = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} x=\frac{z}{7} \\ y=-\frac{4}{7}z \end{array} \right\}$$

$$E = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Puisque $(1,-4,7)$ est un vecteur non nul, il constitue une base de $E$ qui est donc de dimension 1 (droite vectorielle).

2.2 *Réponse rédigée :* Soit $E = \mathrm{Vect}\left((3,0,1),(2,-1,-1),(1,1,2)\right)$. On effectue des opérations élémentaires, pour observer que

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}\left((1,1,2),(2,-1,-1),(3,0,1)\right) && C_1 \leftrightarrow C_3 \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,1,2),(0,-3,-5),(0,-3,-5)\right) && C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,1,2),(0,-3,-5)\right). \end{aligned}$$

Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\lambda(1,1,2)+\mu(0,-3,-5)=(0,0,0)$ alors $\lambda=0$, $\lambda-3\mu=0$, $2\lambda-5\mu=0$ et donc $\lambda=\mu=0$. Donc les vecteurs $(1,1,2)$ et $(0,-3,-5)$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base de $E$. Conclusion, $E$ est de dimension 2.

2.3 *Réponse rédigée :* Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. En notant toujours $P$ la fonction polynomiale associée, on a

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3\,\mathrm{d}t = \left[a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 + \frac{a_3}{4}t^4\right]_{t=0}^{t=1} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a_0 = -\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3} - \frac{a_3}{4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E &= \left\{ -\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3} - \frac{a_3}{4} + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \frac{a_1}{2}(2X-1) + \frac{a_2}{3}\left(3X^2-1\right) + \frac{a_3}{4}\left(4X^3-1\right) \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \tilde{a_1}(2X-1) + \tilde{a_2}\left(3X^2-1\right) + \tilde{a_3}\left(4X^3-1\right) \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (\tilde{a_1},\tilde{a_2},\tilde{a_3}) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(2X-1,\ 3X^2-1,\ 4X^3-1\right) \end{aligned}$$

Or $\mathscr{B} = \left(2X-1, 3X^2-1, 4X^3-1\right)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. Donc $\mathscr{B}$ est libre et forme une base de $E$. Donc $E$ est de dimension Card $(\mathscr{B}) = 3$.

2.4 Soit $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0 \right\}$ On pose $u = (1,0,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v = (0,1,0,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $w = (0,0,1,0,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $x = (0,0,0,1,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a alors $E = \mathrm{Vect}\,(u,v,w,x)$. Or $(u,v,w,x)$ est libre et forme donc une base de $E$. $E$ est donc de dimension 4.

2.5 On montre que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ avec

$$\mathscr{B} = \left( \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} \right).$$

On vérifie que la famille $\mathscr{B}$ est libre et forme donc une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 6.

**Question 3.**

3.1 *Réponse rédigée :* Soit $\mathscr{F} = \left(3 + X + X^2, 5 - 2X^2, 3X + X^2, 1 - X + X^2\right)$. Par des opérations élémentaires, on ne change pas le rang d'une famille. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) &= \mathrm{rg}\left(X^2 + X + 3, 2X + 11, 2X - 3, -2X - 2\right) && \begin{aligned} C_2 &\leftarrow C_2 + 2C_1, \\ C_3 &\leftarrow C_3 - C_1, \\ C_4 &\leftarrow C_4 - C_1 \end{aligned} \\
&= \mathrm{rg}\left(X^2 + X + 3, 2X + 11, -14, 9\right) && \begin{aligned} C_3 &\leftarrow C_3 - C_2, \\ C_4 &\leftarrow C_4 + C_2 \end{aligned} \\
&= \mathrm{rg}\left(X^2 + X + 3, 2X + 11, -14, 0\right) && C_4 \leftarrow C_3 + \frac{9}{14} C_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(X^2 + X + 3, 2X + 11, -14\right)
\end{aligned}$$

La famille $\left(X^2 + X + 3, 2X + 11, -14\right)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés et est donc libre. D'où, $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = 3$.

*NB : puisque Card* $(\mathscr{F}) = 4 > 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, *on savait dès le départ que* $\mathscr{F}$ *est liée ou encore que rg*$(\mathscr{F}) < 4$.

3.2 Soit $\mathscr{F} = ((1, 0, -2), (4, 2, 1), (-1, 3, 1), (0, 3, 3))$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) && \begin{aligned} C_2 &\leftarrow C_2 - 4C_1, \\ C_3 &\leftarrow C_3 + C_1 \end{aligned} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) && C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && \begin{aligned} C_3 &\leftarrow 2C_3 - 3C_2 \\ C_4 &\leftarrow \tfrac{1}{4} C_4 \end{aligned} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && \text{car } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -29 \end{pmatrix} = -29 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La famille obtenue est échelonnée en ses coordonnées et est donc libre. D'où $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = 3$.

*NB : puisque Card* $(\mathscr{F}) = 4 > 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, *on savait dès le départ que* $\mathscr{F}$ *est liée ou encore que rg*$(\mathscr{F}) < 4$.

3.3 *Réponse rédigée :* Soient $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif et $E = \mathscr{F}\,([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R})$. On considère dans $E$ la famille

$$\mathscr{F} = \left(f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto x\cos(x), f_3 : x \mapsto x^2\cos(x)\right).$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Or

$$\begin{aligned}
\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2\right)\cos(x) \\
0 &\underset{x\to 0}{=} \left(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \lambda_1 - \lambda_1 \tfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \\
&\qquad + \lambda_2 x + o\left(x^2\right) \\
&\qquad + \lambda_3 x^2 + o\left(x^2\right) \\
0 &\underset{x\to 0}{=} \lambda_1 + \lambda_2 x + \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_1}{2}\right) x^2 + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 - \frac{\lambda_1}{2} = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille $\mathscr{F}$ est libre et donc de rang 3.

3.4 *Réponse rédigée :* Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = 2$ et $\mathscr{F} = \left(P, P', P'', P^{(3)}, P^{(4)}\right)$. Puisque $\deg(P) = 2$, on sait que $P^{(3)} = P^{(4)} = 0$. Donc $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\,(P, P', P'')$. Puisque $\deg(P) = 2$, on sait également que $\deg(P') = 1$ et $\deg(P'') = 0$. Donc $\mathrm{rg}\,(P, P', P'')$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés et est donc libre. D'où $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = 3$.

3.5 *Réponse rédigée :* Soit $\mathscr{F} = \left((2)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}, (5+2n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Puisque $(5+2n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{5}{2}\times(2)_{n\in\mathbb{N}} + 2\times(n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\,\underbrace{\left((2)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}_{=\mathscr{F}'}$$

Montrons que $\mathscr{F}'$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1\,(2)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2\,(n!)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_3\,(n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ i.e.

$$\forall n\in\mathbb{N}, 2\,\lambda_1 + \lambda_2\,n! + \lambda_3\,n = 0.$$

En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n!\neq 0$ et donc,

$$\frac{2}{n!}\,\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{(n-1)!} = 0.$$

Donc par passage à la limite, $\lambda_2 = 0$. Donc si $n=0$, on a $2\,\lambda_1 + 0 + 0 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$. En évaluant en $n=1$ on obtient également $\lambda_3 = 0$. Et finalement $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ et donc $\mathscr{F}'$ est libre. Conclusion $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = 3$.

**Question 4.**

4.1 *Réponse rédigée :* Soient $F = \{\,P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P(0)=P(1)=0\,\}$ et $G=\{\,P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P(2)=0\,\}$.

- Dune part montrons $F$ et $G$ sont en somme directe i.e. ont une intersection réduite à 0. Soit $P\in F\cap G$. Alors $P\in F$ et donc $P(0)=P(1)=0$ et donc 0 et 1 sont des racines de $P$. De plus $P\in G$ donc 2 est aussi une racine de $P$. Donc $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 ayant trois racines distinctes. Donc $P=0$. Donc $F\cap G\subseteq\left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$ et donc $F\cap G = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$.
- D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F &= \left\{\,a_0+a_1X+a_2X^2\in\mathbb{R}_2[X]\;\middle|\;a_0 = a_0+a_1+a_2 = 0\,\right\}\\ &= \left\{\,a_1X+a_2X^2\in\mathbb{R}_2[X]\;\middle|\;a_1=-a_2\,\right\}\\ &= \left\{\,a\left(X^2-X\right)\in\mathbb{R}_2[X]\;\middle|\;a\in\mathbb{R}\,\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(X^2-X\right).\end{aligned}$$

Puisque $X^2-X$ est non nul, il forme une base de $F$ et donc $\dim(F)=1$. De plus,

$$\begin{aligned} G &= \left\{\,a_0+a_1X+a_2X^2\in\mathbb{R}_2[X]\;\middle|\;a_0+2a_1+4a_2=0\,\right\}\\ &= \left\{\,a_2X^2+a_1X-2a_1-4a_2\in\mathbb{R}_2[X]\;\middle|\;(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\,\right\}\\ &= \left\{\,a_2\left(X^2-4\right)+a_1(X-2)\in\mathbb{R}_2[X]\;\middle|\;(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\,\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(X^2-4, X-2\right).\end{aligned}$$

La famille $\left(X^2-4, X-2\right)$ est de degrés échelonnés, est donc libre et forme une base de $G$. Donc $\dim(G) = 2$. Ainsi,

$$\dim(F)+\dim(G) = \dim(\mathbb{R}_2[X]).$$

Ces deux points démontrent que $F\oplus G = E$.

4.2 Soient $F=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;3x+2y-z=0\,\right\}$ et $G=\mathrm{Vect}\,(0,0,-1)$. Si $u\in F\cap G$ alors $u=\lambda\,(0,0,-1)$ puis on a $3\times 0+2\times 0+\lambda = 0$ et donc $u=0$ donc $F\cap G=\{0\}$. De plus $F=\mathrm{Vect}\,((1,0,3),(0,1,2))$ et est de dimension 2 tandis que $G$ est de dimension 1.

4.3 Soient $F=\{\,M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\mid\mathrm{tr}(M)=0\,\}$ et $G=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Soit $M\in F\cap G$, on a alors $M=\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}$, avec $a\in\mathbb{R}$. Puis $\mathrm{tr}(M)=0$ implique $a=0$ et donc $M=0_2$. D'autre part, $F=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est de dimension 3 et $G$ est de dimension 1. Donc $E$ et $F$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4.4 Soit $F=\mathrm{Vect}\,((1,0,1),(0,4,0),(1,-2,1))$ et $G=\mathrm{Vect}\,(1,0,0)$. Puisque $(1,-2,1)=(1,0,1)-\frac{1}{2}(0,4,0)$, On a $F=\mathrm{Vect}\,((1,0,1),(0,4,0))$. On montre que $((1,0,1),(0,4,0),(1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4.5 Soient $F=\mathbb{R}_3[X]$ et $G=\mathrm{Vect}\left(X^5, X+X^4\right)$. On a $\mathbb{R}_3[X]=\mathrm{Vect}\left(1,X,X^2\right)$. De plus, la famille de polynômes $\left(X^5,X+X^4,X^3,X^2,X,1\right)$ est de degrés échelonnés et forme une base de $\mathbb{R}_5[X]$. Donc $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$.

**Question 5.**

5.1 *Réponse rédigée :* Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. La fonction $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$, il en est donc de même de sa dérivée $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. **La fonction $g$ admet donc un développement limité à tout ordre** (ne pas oublier de justifier a priori pour la dérivation l'existence du DL). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Donc par dérivation des développements limités,

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} x^{k-1} + o\left(x^{n-1}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o\left(x^{n-1}\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

en 0 à partir de celui de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

5.2 $\arccos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^5\right)$.

5.3 Cf cours pour le résultat.

5.4 $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$.

5.5 $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) x^k + o(x^n)$.