Interrogation 19
Applications linéaires

Nom/Prénom :

Note :

1. Caractériser l'injectivité d'une application linéaire de deux façons (à l'aide d'un ensemble puis à l'aide d'une famille).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Caractériser l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide de la dimension.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}$ est-elle linéaire ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & ad - bc \end{array}$ est-elle linéaire ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Déterminer le noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ a_0 + a_1X + a_2X^2 & \mapsto & a_2 + a_0X + a_1X^2 \end{array}$ et préciser si f est injective.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y, z, 0) \end{array}$. Déterminer Ker $\left(f^2\right)$ (attention on ne demande pas le noyau de f) et préciser si f^2 est injective.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si f est surjective.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 2P + 5XP' + X^2P'' \end{array}$ et préciser si f est surjective.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction $x \mapsto x^n$ est n-lipschitzienne sur $[0;1]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. Démontrer que la fonction sh est $\frac{5}{3}$-lipschitzienne sur $[-\ln(3);\ln(3)]$.