Interrogation 19 d'entrainement
Applications linéaires

1. **Enoncer un résultat du cours.**
   1.1 Donner la définition d'une application linéaire, du noyau, de l'image, d'un endomorphisme, d'un automorphisme, d'un isomorphisme.
   1.2 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F, définir $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
   1.3 Caractériser l'injectivité d'une application linéaire (deux solutions, par le noyau et l'image d'une base).
   1.4 Caractériser la surjectivité d'une application linéaire (deux solutions, par l'image et l'image d'une base).
   1.5 Caractériser la bijectivité d'une application linéaire par l'image d'une famille particulière.
   1.6 Caractériser l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide de la dimension.
   1.7 Caractériser qu'une famille soit une base à l'aide du rang.
   1.8 Enoncer la formule de Grassmann.
2. **Déterminer si une application est linéaire.**
   2.1 L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P'' - 5P + 7 \end{array}$ est-elle linéaire ?
   2.2 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. L'application $\tau : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \tau(f) : (t \mapsto f(t+a)) \end{array}$ est-elle linéaire ?
   2.3 L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2} \end{array}$ est-elle linéaire ?
   2.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$ est-elle linéaire ?
   2.5 Soit $B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ un polynôme non nul. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\varphi(P)$ le reste dans la division euclidienne de P par B. L'application φ est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$?
3. **Calculer un noyau.**
   3.1 Déterminer le noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x - y - 2z \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si f est injective.
   3.2 Déterminer le noyau de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f'' - 12f' + 18f \end{array}$ et préciser si f est injective.
   3.3 Déterminer le noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \\ P & \mapsto & (P', P(0)) \end{array}$ et préciser si f est injective.
   3.4 Déterminer le noyau de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : (x \mapsto xf(x)) \end{array}$ et préciser si φ est injective.
   3.5 Déterminer le noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si f est injective.
4. **Calculer une image.**
   4.1 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)) \end{array}$ et préciser si f est surjective.
   4.2 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \frac{M + {}^tM}{2} \end{array}$ et préciser si f est surjective.
   4.3 Déterminer l'image de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ et préciser si f est surjective.
   4.4 Déterminer l'image de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : (t \mapsto \mathrm{e}^t f(t)) \end{array}$ et préciser si φ est surjective.
   4.5 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si f est surjective.

5. **Application du théorème des accroissements finis.**
   5.1 Démontrer que la fonction arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   5.2 Démontrer que la fonction exp est e^3-lipschitzienne sur $[2;3]$.
   5.3 Démontrer que la fonction cos est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   5.4 Démontrer que la fonction arcsin est $\frac{5}{3}$-lipschitzienne sur $\left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right]$.
   5.5 Soit $a > 1$. Démontrer que la fonction $\log_a$ est $\frac{1}{\ln(a)}$-lipschitzienne sur $[1;+\infty[$.

Question 2.

2.1 On observe que $f\left(0_{\mathbb{R}_3[X]}\right) = 7 \neq 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ donc f n'est pas linéaire.

2.2 *Réponse rédigée :* Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$. On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda f + \mu g)(t) = (\lambda f + \mu g)(t + a) = \lambda f(t + a) + \mu g(t + a) = \lambda \varphi(f)(t) + \mu \varphi(g)(t).$$

L'égalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ et φ est bien linéaire.

2.3 On observe que $f(-1) = \frac{\ln(2)}{2} = f(1) \neq -f(1)$ (car $f(1) \neq 0$). Donc f n'est pas linéaire.

2.4 On vérifie que la transposée est linéaire (grâce à la proposition II.10, chapitre 10).

2.5 *Réponse rédigée :* Montrons que φ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$. On pose Q_1, respectivement Q_2, le quotient dans la division de P_1, respectivement P_2, par B et on pose R_1, respectivement R_2, le reste dans la division de P_1, respectivement P_2, par B. On a alors

$$\begin{array}{lll} P_1 = BQ_1 + R_1 & \text{avec} & \deg(R_1) < \deg(B) \\ P_2 = BQ_2 + R_2 & \text{avec} & \deg(R_2) < \deg(B). \end{array}$$

Donc on en déduit que

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = B(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda R_1 + \mu R_2 \qquad (\bigstar)$$

Posons $R = \lambda R_1 + \mu R_2$. On a alors $\deg(R) \leqslant \max(\deg(\lambda R_1), \deg(\mu R_2))$. Or

$$\deg(\lambda R_1) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \lambda = 0 \\ \deg(R_1) & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Donc dans tous les cas, $\deg(\lambda R_1) \leqslant \deg(R_1)$ et de même $\deg(\mu R_2) \leqslant \deg(R_2)$. Par conséquent, $\deg(R) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leqslant \deg(B)$. Donc par $(\bigstar)$ et l'unicité du reste dans la division euclidienne, on en déduit que R est le reste dans la division euclidienne de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par B. Ainsi, par définition de φ, on en déduit que

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = R = \lambda R_1 + \mu R_2 = \lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2).$$

Donc φ est linéaire.

Question 3.

3.1 *Réponse rédigée :* Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (x,y,z) \in \text{Ker}\,(f) & \Leftrightarrow & f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x - y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2y - z \\ y = \frac{4}{3} z \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{8}{3} z - z = \frac{5}{3} z \\ y = \frac{4}{3} z \end{cases} \end{array}$$

Ainsi,

$$\text{Ker}\,(f) = \left\{ \frac{z}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\text{Ker}\,(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc f n'est pas injective.

3.2 On a

$$\text{Ker}\,(f) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{3x} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \right).$$

En particulier $\text{Ker}\,(f) =\neq \left\{0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R})}\right\}$ donc f n'est pas injective.

3.3 *Réponse rédigée :* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P) = (P', P(0)) = 0_{\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}} = \left(0_{\mathbb{R}[X]}, 0_{\mathbb{R}}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P' = 0 \\ P(0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, P = C \\ P(0) = C = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$ et f est injective.

3.4 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(f) = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad x f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = 0. \end{aligned}$$

Or la fonction f est continue donc si $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$, par passage à la limite, $f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 0 = 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. La réciproque étant toujours vraie, on en déduit que

$$f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R})}.$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi) = \left\{0_{\mathscr{C}(\mathbb{R})}\right\}$ et φ est injective.

3.5 On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

En particulier $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0_2\}$ et donc f n'est pas injective.

Question 4.

4.1 *Réponse rédigée :* On sait que $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X), f\left(X^2\right), f\left(X^3\right)\right)$$

Si $P = 1$, $P(0) = 1$ et $P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 0$ donc $f(1) = (1, 0, 0, 0)$. De la même façon, on a $f(X) = (0, 1, 0, 0)$, $f\left(X^2\right) = (0, 0, 2, 0)$ et $f\left(X^3\right) = (0, 0, 0, 6)$. Donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right).$$

On ne change pas l'espace engendré en effectuant des opérations élémentaires sur la famille génératrice donc en faisant $C_3 \leftarrow \frac{C_3}{2}$ et $C_4 \leftarrow \frac{C_4}{6}$, on trouve

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Or $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donc $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ et l'application linéaire f est surjective.

4.2 On a

$$\operatorname{Im}(f) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

Donc $\operatorname{Im}(f) \neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et f n'est pas surjective.

4.3 Soit $a \in \mathbb{R}$, on a $a = \varphi(f_a)$ où $f_a : x \mapsto a$. Donc $a \in \operatorname{Im}(f)$. Ainsi $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ et f est surjective.

4.4 Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. On pose $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} g(t)$. Alors $\varphi(f) = g$. Donc $g \in \operatorname{Im}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et φ est surjective.

4.5 Puisque $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\left(f\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

La famille obtenue est libre et forme donc une base de $\operatorname{Im}(f)$. En particulier $\operatorname{Im}(f) \neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donc f n'est pas surjective.

Question 5.

5.1 *Réponse rédigée :* La fonction arcsin est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et donc $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right]$. Donc f est lipschitzienne sur $\left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right]$. De plus, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall (x,y) \in \left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right], \qquad |\arcsin(x) - \arcsin(y)| \leqslant \sup_{z\in[x;y]} |\arcsin'(z)|\,|x-y| \leqslant \sup_{z\in\left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right]} \left|\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right| |x-y|\,.$$

Or pour tout $z \in \left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right]$

$$\begin{aligned}0 \leqslant z^2 \leqslant \frac{16}{25} \qquad &\Rightarrow \qquad -\frac{16}{25} \leqslant -z^2 \leqslant 0\\ &\Rightarrow \qquad 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \leqslant 1 - z^2 \leqslant 1.\end{aligned}$$

Donc par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, et décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $z \in \left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right]$,

$$\frac{3}{5} \leqslant \sqrt{1-z^2} \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \leqslant \frac{5}{3}.$$

Ainsi $\sup_{z\in\left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right]} \left|\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right| \leqslant \frac{5}{3}$ et donc

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |\arcsin(x) - \arcsin(y)| \leqslant \frac{5}{3}\,|x-y|\,.$$