Interrogation 21 d'entrainement
Arithmétique et dénombrement

1. **Enoncer un résultat du cours.**
   1.1 Définir le fait que deux entiers soient premiers entre eux.
   1.2 Définir un nombre premier.
   1.3 Enoncer le lemme d'Euclide.
   1.4 Définir le cardinal d'un ensemble.
   1.5 Que dire d'un sous-ensemble d'un ensemble fini ? Caractériser l'égalité.
   1.6 Caractériser les bijections.
   1.7 Quel est le cardinal du complémentaire ? de l'union disjointe ? de l'union quelconque ? du produit ? de l'ensemble des applications ? des injections ?
   1.8 Comment appelle-t-on n tirage successif sans remise ? un tirage successif avec remise ? un tirage simultané ?
   1.9 Quel est le nombre de p-uplet d'un ensemble E ? le nombre d'arrangements de p parmi n (notation et formule) ? le nombre de permutations de p parmi n ? le nombre de parties de cardinal p dans un ensemble n (notation et formule) ?
   1.10 Définir $\mathscr{P}(E)$ et donner son cardinal.
2. **Calculer un $PGCD/PPCM$.**
   2.a1 A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, calculer le $PGCD$ et le $PPCM$ de 1386 et 660.
   2.a2 A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, calculer le $PGCD$ et le $PPCM$ de 1625 et 975.
   2.a3 A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, calculer le $PGCD$ et le $PPCM$ de 682 et 87.

   2.b1 En appliquant l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD$ de 5252 et 3346.
   2.b2 En appliquant l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD$ de 770 et 365.
   2.b3 En appliquant l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD$ de 682 et 787.
3. **Dénombrer.** Au poker on distribue au cours des enchères 5 cartes à chaque joueur parmi les 52 cartes d'un jeu classique. Le donneur dispose également de façon ordonnée 5 cartes sur la table face découverte, ce que l'on appelle les cartes communes. Pour chacune des questions, on exprimera le résultat comme un produit de combinaisons et/ou d'arrangements que l'on ne calculera pas.
   3.1 Déterminer le nombre de mains possibles possédant un brelan : trois cartes de même valeur et les deux autres cartes de valeurs distinctes de la précédente valeur (mais éventuellement ces deux cartes ont la même valeur : on compte les full comme des brelans particuliers mais les carrés ne sont pas considérés comme des brelans ici).
   3.2 Déterminer le nombre de mains possibles présentant une couleur : les cinq cartes sont de la même couleur.
   3.3 Déterminer le nombre de dispositions des cartes communes comprenant exactement deux figures (valet/dame/roi) et deux as.
   3.4 Déterminer le nombre de dispositions des cartes communes comprenant cinq cartes de même couleur.
   3.5 Déterminer le nombre de dispositions des cartes communes comprenant un carré d'as.
4. **Manipulation des cardinaux.** Une association de protection du dahu lance une campagne de dénombrement des dahus vivant en France. Voici les deux caractéristiques principales du dahu : le dahu est un animal possédant deux pattes plus courtes que les autres. Il y a donc les dextrogyres (qui ont les pattes du côté droit plus courtes et tournent donc sur la montagne toujours vers la droite) et les lévogyres (qui ont les pattes du côté gauche plus coutres). Certains dahus possèdent également des ailes (pour aller découvrir de nouvelles montagnes) et d'autres non.
   4.1 Parmi les 234 dahus des Pyrénées, on a recensé 91 dahu dextrogyres et 173 dahus qui sont ou lévogyres ou n'ayant pas d'ailes. Combien de dahus dextrogyres sont sans aile ?
   4.2 Parmi les 32 dahus du Massif-Central, 15 sont lévogyres, 19 possèdent des ailes et 8 sont dextrogyres avec ailes. Combien de dahus lévogyres sont sans aile ?

4.3 Parmi les 203 dahus des Alpes, 103 sont sans ailes, 11 sont lévogyres sans aile et 191 sont lévogyres ou sont sans aile. Combien de dahus sont dextrogyres ?

4.4 Parmi les dahus du Jura, 62 sont dextrogyres, 41 possèdent des ailes, 103 sont sans aile ou sont lévogyres et 87 sont dextrogyres ou sont avec des ailes. Combien y a-t-il de dahus dans le Jura ?

4.5 Dans les Vosges, tous les dahus dextrogyres possèdent des ailes. Parmi les 117 dahus des Vosges, 110 possèdent des ailes et 106 sont lévogyres. Combien de dahus lévogyres sont avec des ailes ?

5. **Théorème de la bijection.**

5.1 Appliquer le théorème de la bijection à la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

5.2 Appliquer le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

5.3 Appliquer le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[\mathrm{e}; +\infty[$.

5.4 Appliquer le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto 12 + \frac{1}{x+5}$ sur $\mathbb{R}_+$.

5.5 Appliquer le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto \tan\left(x^2 - \frac{\pi}{2}\right)$ sur $]0; \sqrt{\pi}[$.

Question 2.

2.a1 *Réponse rédigée :* On a
$$1386 = 2 \times 693 = 2 \times 9 \times 77 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$$
et
$$660 = 10 \times 66 = 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11.$$
Par conséquent,
$$PGCD\,(1386, 660) = 2 \times 3 \times 11 = 66$$
et
$$PPCM\,(1386, 660) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 1386 \times 2 \times 5 = 1386 \times 10 = 13860.$$

2.a2 On a $1625 = 5^3 \times 13$ et $975 = 3 \times 5^2 \times 13$. Donc $PGCD\,(1625, 975) = 325$ et $PPCM\,(1625, 975) = 4875$.

2.a3 On a $682 = 2 \times 11 \times 31$ et $87 = 3 \times 29$. Donc $PGCD\,(682, 87) = 1$ et $PPCM\,(682, 87) = 59334$.

2.b1 *Réponse rédigée :* On a les calculs suivants :
$$\begin{aligned}5252 &= 3346 \times 1 + 1906\\ 3346 &= 1906 \times 1 + 1440\\ 1906 &= 1440 \times 1 + 466\\ 1440 &= 466 \times 3 + 42\\ 466 &= 42 \times 11 + 4\\ 42 &= 4 \times 10 + 2\\ 4 &= 2 \times 2 + 0.\end{aligned}$$
Le dernier reste non nul étant 2, on en déduit que $PGCD\,(5252, 3346) = 2$.

2.b2 On a $PGCD\,(770, 365) = 5$.

2.b3 On a $PGCD\,(787, 682) = 1$ i.e. les nombres 682 et 787 sont premiers entre eux.

Question 3.

3.1 *Réponse rédigée :* Pour construire un brelan, on choisit d'abord la valeur des cartes identiques. On a 13 valeurs possibles, on prend donc 1 parmi 13 : $\binom{13}{1}$. Appelons v la valeur choisie. Il nous faut ensuite choisir deux cartes parmi toutes les cartes du jeu qui non pas la valeur v. Il a 4 cartes de valeur v donc $52 - 4 = 48$ cartes qui n'ont pas la valeur v. L'ordre dans une main étant sans importance, cela constitue un tirage simultané de deux cartes parmi 48 : $\binom{48}{2}$. Au total, on a
$$\binom{13}{1}\binom{48}{2}$$
mains possibles.

3.2 *Réponse rédigée :* On commence par choisir la couleur, on a alors $\binom{4}{1}$ possibilités. Puis la couleur étant choisit il nous faut prendre 5 cartes parmi les 13 de cette couleur, le tirage étant simultané : $\binom{13}{4}$ choix. Au total, on a
$$\binom{4}{1}\binom{13}{4}$$
mains possibles.

3.3 *Réponse rédigée : Méthode 1.* On commence par choisir 2 figures parmi toutes les figures. On a $3 \times 4 = 12$ figures possibles. On effectueun tirage simultané, on a $\binom{12}{2}$. Il nous faut ensuite choisir 2 as parmi les quatre as du jeu. Le tirage étant simultané, on a $\binom{4}{2}$ choix possibles. Il nous reste à prendre une carte qui ne soit ni un as ni une figure donc il nous faut prendre une carte parmi $52 - 12 - 4 = 36$: $\binom{36}{1}$. Nous avons maintenant toutes nos cartes il nous faut les ranger, on fait donc une permutations de nos cinq cartes : A_5^5 façons de les ranger. Au total, on a
$$\binom{12}{2}\binom{4}{2}\binom{36}{1}A_5^5.$$
dispositions possibles.

Méthode 2. On choisit la place de nos figures sur la table. Il nous faut donc prendre 2 positions parmi les 5 disponibles. C'est un tirage simultané : on a $\binom{5}{2}$. Puis dans ces positions, on range 2 figures parmi les 12 possibles, cela constitue un arrangement de 2 parmi 12 : A_{12}^2 possibilités. On fait de même pour les as. On choisit deux positions parmi les trois restantes : $\binom{3}{2}$ choix et l'on range dans ces positions 2 as parmi les 4 possibles : A_4^2. Enfin on tire une carte qui n'est ni une figure ni un as dans la dernière position libre : $\binom{36}{1}$. Au total, on a

$$\binom{5}{2}A_{12}^2\binom{3}{2}A_4^2\binom{36}{1}$$

dispositions possibles.

En développant chacune des expressions en factoriels, on vérifie que l'on trouve le même résultat dans chaque cas.

3.4 *Réponse rédigée :* On choisit une couleur parmi les quatre possibles : on a donc $\binom{4}{1}$ choix. Puis il nous faut ranger 5 cartes parmi les 13 de cette même couleur : A_{13}^5. Au total on a donc

$$\binom{4}{1}A_{13}^5,$$

dispositions possibles.

3.5 *Réponse rédigée :* On choisit les quatre positions des as parmi les cinq possibles : c'est un tirage simultané donc $\binom{5}{4}$ choix possibles. Une fois les positions choisies, on y range nos quatre as, cela constitue une permutation des quatre as du jeu : A_4^4 choix possibles. Enfin, on choisit une carte parmi celle qui ne sont pas des as pour compléter notre disposition : c'est un tirage d'une carte parmi $52-4=48$ cartes : $\binom{48}{1}$. Au total, on a

$$\binom{5}{4}A_4^4\binom{48}{1}$$

dispositions possibles.

Question 4.

4.1 *Réponse rédigée :* On pose E l'ensemble des dahus, A l'ensemble des dahus dextrogyres et B l'ensemble des dahus avec des ailes. D'après l'énoncé, on a $|E|=234$, $|A|=91$ et $\left|\overline{A}\cup\overline{B}\right|=173$ et l'on cherche $\left|A\cap\overline{B}\right|$. Or $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. Donc on en déduit que

$$|A\cap B|=|E|-\left|\overline{A\cap B}\right|=|E|-\left|\overline{A}\cup\overline{B}\right|=234-173=61.$$

Comme $A=\left(A\cap\overline{B}\right)\sqcup(A\cap B)$, on en déduit que

$$\left|A\cap\overline{B}\right|=|A|-|A\cap B|=91-61=30.$$

Il y a 30 dahus dextrogyres sans aile.

4.2 *Réponse rédigée :* Avec les notations de la question précédente, on a Card $(E)=32$, Card $\left(\overline{A}\right)=15$, Card $(B)=19$, Card $(A\cap B)=8$ et l'on cherche Card $\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$. Puisque $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\text{Card }\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)&=\text{Card }(E)-\text{Card }(A\cup B)\\&=\text{Card }(E)-(\text{Card }(A)+\text{Card }(B)-\text{Card }(A\cap B))\\&=\text{Card }\left(\overline{A}\right)+\text{Card }(B)-\text{Card }(A\cap B)\\&=15+19-8=26.\end{aligned}$$

Conclusion, 26 dahus lévogyres sans aile.

4.3 *Réponse rédigée :* Avec les notations des questions précédentes, on a $|E|=203$, $\left|\overline{B}\right|=103$ et $\left|\overline{A}\cap\overline{B}\right|=11$, $\left|\overline{A}\cup\overline{B}\right|=191$ et l'on cherche $|A|$. On a

$$\begin{aligned}|A|&=|E|-\left|\overline{A}\right|\\&=|E|-\left(\left|\overline{A}\cup\overline{B}\right|-\left|\overline{B}\right|+\left|\overline{A}\cap\overline{B}\right|\right)\\&=203-(191-103+11)=203-99=104.\end{aligned}$$

Conclusion, 104 dahus sont dextrogyres.

4.4 Avec les notations des questions précédentes, on a Card $(A) = 62$, Card $(B) = 41$, Card $\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 103$, Card $(A \cup B) = 87$ et l'on cherche Card (E). On a

$$\begin{aligned}\text{Card }(E) &= \text{Card }(A \cap B) + \text{Card }\left(\overline{A \cap B}\right)\\ &= \text{Card }(A) + \text{Card }(B) - \text{Card }(A \cup B) + \text{Card }\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\\ &= 62 + 41 - 87 + 103 = 119.\end{aligned}$$

Conclusion, il y a 119 dahus dans le Jura.

Parmi les dahus du Jura, 62 sont dextrogyres, 41 possèdent des ailes et 103 sont sans aile ou sont lévogyres. Combien y a-t-il de dahus dans le Jura ?

4.5 *Réponse rédigée :* En gardant les mêmes notations, on a $A \subseteq B$, $\#E = 117$, $\#B = 110$, $\#\overline{A} = 106$ et l'on cherche $\#\overline{A} \cap B$. Puisque $A \subseteq B$, on a $B = (B \setminus A) \sqcup A = \left(B \cap \overline{A}\right) \sqcup A$. Donc

$$\begin{aligned}\#\overline{A} \cap B &= \#B - \#A\\ &= 110 - 106 = 4.\end{aligned}$$

Conclusion 4 dahus sont lévogyres avec des ailes.

Question 5.

5.1 *Réponse rédigée :* La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ et l'on a

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$

Donc d'après le théorème de la bijection, la fonction exponentielle définie une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$ et sa réciproque (qui existe donc) est une bijection $]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

5.2 *Réponse rédigée :* Soit $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3.$$

Soit Δ le discriminant associé à $f'(x)$, on a $\Delta = 16 - 4 \times 3 \times 3 = -20 < 0$ donc f' est de signe constant celui de 3 donc f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc d'après le théorème de la bijection, on en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5.3 Avec l'étude de sa dérivée (à faire), on montre que $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ définie sur $[\mathrm{e}; +\infty[$ est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}; +\infty[$. De plus f est continue sur $[\mathrm{e}; +\infty[$ et $f(e) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et par croissance comparée $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donc par le théorème de la bijection, on en déduit que f est une bijection de $[\mathrm{e}; +\infty[$ dans $[0; 1/\mathrm{e}]$ et f^{-1} est une bijection de $[0; 1/\mathrm{e}]$ dans $[\mathrm{e}; +\infty[$ continue et strictement décroissante.

5.4 Par l'étude de sa dérivée (à faire), on montre que la fonction $f : x \mapsto 12 + \frac{1}{x+5}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 12 + \frac{1}{5} = \frac{61}{5}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 12$. Donc d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left[12; 12 + \frac{1}{5}\right]$ et sa réciproque f^{-1} est une bijection de $\left[12; 12 + \frac{1}{5}\right]$ dans $\mathbb{R}_+$ strictement décroissante et continue.

5.5 *Réponse rédigée :* Pour tout $x \in]0; \sqrt{\pi}[$, on a $0 < x^2 < \pi$ et donc $-\frac{\pi}{2} < x^2 - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$. $x \mapsto x^2 - \frac{\pi}{2}$ est strictement croissante sur $]0; \sqrt{\pi}[$ et $y \mapsto \tan(y)$ est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc par composée de fonctions strictement croissantes, la fonction $f : x \mapsto \tan\left(x^2 - \frac{\pi}{2}\right)$ définie $]0; \sqrt{\pi}[$ est strictement croissante sur $]0; \sqrt{\pi}[$. De plus f est continue sur $]0; \sqrt{\pi}[$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc par le théorème de la bijection, f est une bijection de $]0; \sqrt{\pi}[$ dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque f^{-1} (qui existe donc bien) est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; \sqrt{\pi}[$, continue et strictement croissante.