Interrogation 22 d'entrainement
Séries

1. **Enoncer un résultat du cours.**
   1.1 Pour une série donnée, définir la somme partielle, le terme général de la série, la somme totale (condition d'existence ?), le reste (condition d'existence ?). Donner la nature des objets manipulés (suite, fonction, scalaire, ensemble ?).
   1.2 Propriétés du reste.
   1.3 Définir la divergence grossière. Donner un contre-exemple à sa contraposée.
   1.4 Condition de convergence d'une série géométrique et calcul de la somme.
   1.5 Condition de convergence d'une somme télescopique.
   1.6 Enoncer le théorème de comparaison série-intégrale.
   1.7 Enoncer le théorème de comparaison.
   1.8 Enoncer la propriété sur les séries de Riemann.
   1.9 Définir la convergence absolue et donner le lien entre convergence absolue et convergence.
2. **Nature d'une série à terme positif par équivalent.**
   2.1 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n+3^n}{5n^3-\ln(n)+5^n}$.
   2.2 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.
   2.3 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.
   2.4 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
   2.5 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=-\left[\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.
3. **Nature d'une série à terme positif par comparaison.**
   3.1 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$.
   3.2 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^3}$.
   3.3 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note r_n le reste de n par la division euclidienne par 5.
   Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{r_n}{n^{3/2}}$.
   3.4 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\ln^3(n)}$.
   3.5 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2-n+1}{2^n}$.
4. **Manipuler les $\mathcal{O}$.**
   4.1 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=5n^2+12n-1$ et $v_n=-2n^2+4$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.
   4.2 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n+\cos\left(5n^3\right)$ et $v_n=1$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$ (on pourra admettre que u_n ne s'annule pas).
   4.3 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{-1}{n^2}+\frac{2}{n^3}$ et $v_n=\frac{1}{n^3}$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.
   4.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.
   4.5 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}$ et $v_n=u_n^2$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.

5. **Combinatoire.** Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![1; n]\!]$. On considère une urne contenant N boules bleues numérotées de 1 à N, N boules rouges numérotées de 1 à N et N boules vertes numérotées de 1 à N.
   5.1 On tire simultanément n boules. Combien de tirages avec 4 boules rouges exactement sont possibles ?
   5.2 On tire successivement sans remise n boules. Combien de tirages avec deux boules rouges et deux boules vertes exactement ?
   5.3 On tire successivement avec remise n boules. Combien de tirages avec deux boules rouges et trois boules bleues exactement sont possibles ?
   5.4 On tire simultanément n boules. Combien de tirages sans boules bleues sont possibles ?
   5.5 On tire successivement avec remise n boules. Combien de tirages avec exactement deux boules vertes sont possibles ?

Question 2.

2.1 *Réponse rédigée :* On a $2^n + 3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$ et $5n^3 - \ln(n) + 5^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 5^n$. Donc par quotient d'équivalents, on a

$$\frac{2^n + 3^n}{5n^3 - \ln(n) + 5^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

De plus, d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0$ et d'autre part, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $3/5 \in]-1;1[$ et est donc convergente. Or deux séries **à termes positifs** équivalentes ont même nature donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n+3^n}{5n^3-\ln(n)+5^n}$ converge.

2.2 *Réponse rédigée :* On a asymptotiquement,

$$\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right).$$

On sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right)$. Donc, en posant $u = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$, on a

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\ u^2 &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ o\left(u^2\right) &\underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Or $\ln(1+v) \underset{v\to0}{=} v + o(v)$. Donc en posant $v = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on a

$$\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

De plus pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{2}{n^2} > 0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc converge. Or deux séries à termes positifs équivalentes ont même nature. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ converge.

2.3 *Réponse rédigée :* On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln(n)} = \mathrm{e}^{-\ln(n)-\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}.$$

Or par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} = 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ et la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. Or deux séries à termes positifs équivalentes sont de même nature. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$ diverge.

2.4 Après calcul, on a $\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2n} > 0$. et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}}{2n}$ diverge. Or deux séries à termes positifs équivalentes sont de même nature donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge.

2.5 Après calcul, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7}{24n^2} > 0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ et donc converge. Or deux séries à termes positifs équivalentes sont de même nature. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Question 3.

3.1 *Réponse rédigée :* On sait que $n^2 \underset{n\to+\infty}{\ll} n!$ i.e. que $\frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{n^2}$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 < \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

De plus $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$, donc converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ converge.

3.2 *Réponse rédigée :* On sait que $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \ln(n) \leqslant n$$

donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \frac{\ln(n)}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$, donc converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

3.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant r_n < 5$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \frac{r_n}{n^{3/2}} < \frac{5}{n^{3/2}}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$, donc converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{r_n}{n^{3/2}}$ converge.

3.4 *Réponse rédigée :* On a $\ln^3(n) \underset{n\to+\infty}{\ll} n$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 < \ln^3(n) \leqslant n.$$

Par décroissance de la fonction inverse, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\ln^3(n)}.$$

Or la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln^3(n)}$ diverge.

3.5 *Réponse rédigée :* Puisque $\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{n^2-n+1}{2^n} = 0$ par croissance, on en déduit que $\frac{n^2-n+1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{n^2}$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{n^2-n+1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$. De plus pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{n^2-n+1}{2^n} \geqslant 0$. Donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \frac{n^2-n+1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$, donc converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2-n+1}{2^n}$ converge.

NB : on pouvait aussi utiliser que $\frac{n^2-n+1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\ll} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et utiliser le fait que la série géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]0;1[$ converge.

Question 4.

4.1 *Réponse rédigée :* On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+12n-1}{-2n^2+4} = -\frac{5}{2}.$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ étant convergente est une suite bornée. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$. De même par passage à l'inverse, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ converge vers $-\frac{2}{5}$ et est donc aussi bornée et donc on a également $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.

Vous noterez que la relation être dominée peut être réflexive alors que ce n'est jamais le cas pour la relation être négligeable.

4.2 On a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.

Le fait d'être « un grand $\mathcal{O}$ » de 1 i.e. être dominée par la suite constante égale à 1 est équivalent au fait d'être une suite bornée.

4.3 *Réponse rédigée :* On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}n^3\left(\frac{-1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)=\lim_{n\to+\infty}-n+2=-\infty.$$

Donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ n'est pas bornée et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cependant par passage à l'inverse,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0.$$

Donc la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geqslant N}$ est bornée et donc $v_n = \underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(u_n)$.

NB : dans tous les cas, si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ alors $a_n \underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(b_n)$.

4.4 *Réponse rédigée :* Nous n'avons pas assez d'informations pour savoir si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Exemple, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=n$ et $v_n=1$, alors on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(1)$ et pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\frac{u_n}{v_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Inversement on ne sait pas non plus si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Exemple, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{n}$ et $v_n=1$, alors on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(1)$ et pourtant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dominée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\frac{v_n}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

4.5 On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$ et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$. Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(v_n)$ et on sait également que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas dans ce cas dominé par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Question 5.

5.1 *Réponse rédigée :* Pour obtenir 4 boules, on tire dans un premier temps de façon simultanée 4 boules parmi les N de l'urne (on suppose $N\geqslant 4$). On a donc $\binom{N}{4}$ choix. Puis il nous reste à tirer $n-4$ boules de façon simultanée parmi les bleues et les vertes dans parmi les $2N$ boules non-rouges donc $\binom{2N}{n-4}$ choix. Au total le nombre de possibilités est

$$\binom{N}{4}\binom{2N}{n-4}.$$

5.2 *Réponse rédigée :* On commence par tirer les boules sans ordre. On prend deux boules parmi les rouges : $\binom{N}{2}$ choix puis deux boules parmi les vertes $\binom{N}{2}$ puis toutes les autres boules doivent être bleues donc $n-4$ boules parmi les N boules bleues $\binom{N}{n-4}$. Enfin une fois les boules tirées, on les ordonne A_n^n. Au total le nombre de possibilités est

$$\binom{N}{2}^2\binom{N}{n-4}A_n^n.$$

5.3 *Réponse rédigée :* On choisit les places des deux boules rouges on a $\binom{n}{2}$ choix. Puis on choisit une boule rouge, N choix et le tirage étant avec remise, on a toujours N choix pour la seconde boule rouge. De même on choisit les places des boules bleues parmi les places restantes : $\binom{n-2}{3}$ choix puis on tire avec remise trois boules bleues N^3 choix. Enfin, on tire successivement avec remise les $n-5$ boules vertes que l'on place dans les places disponibles : N^{n-5} choix. Au total le nombre de possibilités est

$$\binom{n}{2}N^2\binom{n-2}{3}N^3N^{n-5}=\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}N^n.$$

Notez qu'ici la formule se simplifie mais cela est uniquement dû au fait que le nombre de boules rouges est le même que le nombre de boules bleues et que le nombre de boules vertes.

5.4 *Réponse rédigée :* Il suffit simplement de tirer simultanément n boules parmi les $2N$ boules vertes ou rouges. Au total le nombre de possibilités est

$$\binom{2N}{n}.$$

5.5 *Réponse rédigée :* On choisit les places des deux boules vertes : $\binom{n}{2}$ choix. On tire successivement avec remise deux boules vertes que l'on range dans ces places : N^2 choix. On tire avec remise ensuite $n-2$ boules parmi les $2N$ boules rouges ou bleues : $(2N)^{n-2}$ choix. Au total le nombre de possibilités est

$$\binom{n}{2}N^2(2N)^{n-2}=\binom{n}{2}2^{n-2}N^n.$$