# Interrogation 23 d'entrainement
# Probabilités

1. **Enoncer un résultat du cours.**
   1.1 Définir proprement une probabilité.
   1.2 Définir deux évènements incompatibles.
   1.3 Enoncer la propriétés donnant la probabilité d'une union disjointes de $n$ évènements.
   1.4 Définir un système complet d'évènements incompatibles.
   1.5 Définir une probabilité équiprobable. Si l'univers est fixé, cette probabilité est-elle unique ?
   1.6 Enoncer la formule des probabilités composées pour $p$ évènements.
   1.7 Enoncer la formule des probabilités totales avec l'intersection/avec les probabilités conditionnelles.
   1.8 Enoncer la formule de Bayes avec $p$ évènements.
2. **Calcul de probabilités.**
   2.1 Dans une population 80% des individus aiment les maths, 30% aiment le rugby et parmi ceux qui aiment le rugby, 40% aiment aussi les maths. Quelle est la probabilité qu'un individu aime le rugby sachant qu'il aime les maths ?
   2.2 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 40% préfère le rugby et 15% le basket. Parmi ceux qui aiment le rugby, 10% le pratique. Parmi ceux qui aiment le basket, 85% le pratique et parmi ceux qui aiment le foot, 90% n'y jouent pas. Sachant qu'un individu pratique au plus un sport et que ce sport, s'il est pratiqué, est nécessairement celui qu'il préfère, quelle est la probabilité qu'un individu pratique l'un de ces trois sports ?
   2.3 Dans une population 60% des individus aiment les maths. On sait que 45% aiment le rugby ou n'aiment pas les maths. Quelle est la probabilité d'un individu aime les maths et le rugby ?
   2.4 Dans une population, parmi ceux qui aiment les maths et le rugby, 90% aiment le chocolat. Parmi ceux qui aiment les maths, 25% n'aiment pas le rugby. Enfin 2 individus sur 10 aiment les maths. Quelle est la probabilité qu'un individu aime les maths, le rugby et le chocolat ?
   2.5 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 20% choisissent le foot et 25% choisissent le basket. Parmi ceux qui préfèrent le foot, 15% aiment les maths. Parmi ceux qui préfèrent le rugby, 55% aiment les maths et enfin parmi ceux qui préfèrent le basket, 45% n'aiment pas les maths. Sachant qu'un individu aime les maths, quelle est la probabilité qu'il préfère le rugby ?
3. **Calculs de probabilités.**
   3.1 On tire sans remise deux cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un roi au premier tirage sachant que l'on a obtenu un roi au second tirage ?
   3.2 On lance à deux reprises une fléchette. La probabilité de toucher la cible au premier lancer est de $0,4$, la probabilité de toucher la cible au second lancer est de $0,75$ et la probabilité de toucher la cible au second lancer sachant que l'on a touché la cible au premier lancer est de $0,9$. Calculer la probabilité d'avoir touché la cible au moins une fois sur les deux lancers ?
   3.3 On tire sans remise trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre un trèfle puis un carreau puis encore un trèfle ?
   3.4 Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules bleues et 5 boules vertes. On tire de façon équiprobable une boule. Si la boule est rouge on lance un dé à 4 faces (tétraèdre) si la boule est bleue, on lance un dé à six face (un cube) et si la boule est verte on lance un dé à 8 faces (octaèdre). Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 4 ?
   3.5 On lance deux dés à 6 faces, l'un rouge et l'autre vert. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 avec le dé vert sachant que la somme des deux dés fait 7 ?

4. **Nature d'une série.**
   4.1 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n)}{n^3}$.
   4.2 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 6} \frac{\ln^5(n)}{n-5}$.
   4.3 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n+3} - \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$.
   4.4 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln^5(n)}{n^2}$.
   4.5 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^n}{n!}$.
5. **Calculer un équivalent.**
   5.1 Déterminer un équivalent simple de $\arccos\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}}\right)$.
   5.2 Déterminer un équivalent simple quand $x\to 0$ de $\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\mathrm{sh}(x)}$.
   5.3 Déterminer un équivalent simple quand $x\to+\infty$ de $\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}} - \frac{x(x+1)}{x^3} - 1$.
   5.4 Déterminer un équivalent simple quand $x\to+\infty$ de $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1$.
   5.5 Déterminer un équivalent simple quand $x\to+\infty$ de $\sqrt{x^2-3} - \sqrt[3]{x^3+7x+1}$.

**Question 2.**

2.1 *Réponse rédigée :* On note $A$ l'évènement « l'individu aime les maths » et $B$ l'évènement « l'individu aime le rugby ». D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{10}$ et $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{4}{10}$. On cherche $\mathbb{P}(B \mid A)$. Par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{4}{10}\frac{4}{10}\frac{10}{8} = \frac{2}{10}.$$

2.2 *Réponse rédigée :* On note $A_1$ l'évènement « l'individu préfère le foot », $A_2$ l'évènement « l'individu préfère le rugby », $A_3$ l'évènement « l'individu préfère le basket » et enfin $B$ l'évènement « l'individu pratique son sport favori ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{40}{100}, \qquad \mathbb{P}(A_3) = \frac{15}{100}, \qquad \mathbb{P}(B \mid A_2) = \frac{10}{100}, \qquad \mathbb{P}(B \mid A_3) = \frac{85}{100}, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{B} \mid A_1\right) = \frac{90}{100}$$

et on cherche $\mathbb{P}(B)$. Puisque $(A_i)_{i\in[\![1;3]\!]}$ forment un système complet d'évènements incompatibles, on a $1 = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$ i.e.

$$\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_2) = 1 - \frac{40}{100} - \frac{15}{100} = \frac{45}{100}.$$

De plus,

$$\mathbb{P}(B \mid A_1) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B} \mid A_1\right) = 1 - \frac{90}{100} = \frac{10}{100}.$$

Par la formule des probabilités totales, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B \mid A_3)\,\mathbb{P}(A_3) \\
&= \frac{10}{100}\frac{45}{100} + \frac{10}{100}\frac{40}{100} + \frac{85}{100}\frac{15}{100} \\
&= \frac{450 + 400 + 850 + 425}{10000} = \frac{2125}{10000} = \frac{425}{2000} = \frac{85}{400} = \frac{17}{80}.
\end{aligned}$$

2.3 *Réponse rédigée :* On pose $A$ l'évènement « l'individu aime les maths », $B$ l'évènement « l'individu n'aime pas le rugby ». D'après l'énoncé , on a $\mathbb{P}(A) = \frac{35}{100}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cup B\right) = \frac{40}{100}$ et l'on cherche $\mathbb{P}(A \cap B)$. Puisque

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\left(\overline{\overline{A} \cup B}\right) + \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A} \cup B\right) + \mathbb{P}(A \cap B),$$

on en déduit que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cup B\right) - 1 = \frac{60}{100} + \frac{45}{100} - \frac{100}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

2.4 *Réponse rédigée :* On note $A$ l'évènement « l'individu aime les maths », $B$ l'évènement « l'individu aime le rugby » et $C$ l'évènement « l'individu aime le chocolat ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(C \mid A \cap B) = \frac{90}{100}, \qquad \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{25}{100}, \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{20}{100}.$$

On cherche $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$. Par la formule des probabilités composées, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C \mid A \cap B)\,\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A) = \frac{90}{100}\frac{25}{100}\frac{20}{100} = \frac{45}{1000} = \frac{9}{200}.$$

2.5 *Réponse rédigée :* On note $A_1$ l'évènement « l'individu préfère le foot », $A_2$ « l'individu préfère le rugby », $A_3$ « l'individu préfère le basket » et $B$ l'évènement « l'individu aime les maths ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{20}{100}, \qquad \mathbb{P}(A_3) = \frac{25}{100}, \qquad \mathbb{P}(B \mid A_1) = \frac{15}{100}, \qquad \mathbb{P}(B \mid A_2) = \frac{55}{100}, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{B} \mid A_3\right) = \frac{45}{100}.$$

On cherche $\mathbb{P}(A_2 \mid B)$. Puisque $(A_i)_{i\in[\![1;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements incompatibles, par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(A_2 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_2)\,\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B \mid A_3)\,\mathbb{P}(A_3)}.$$

Or, comme $(A_i)_{i\in[\![1;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements incompatibles, $1 = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3)$ i.e.

$$\mathbb{P}(A_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_3) = 1 - \frac{20}{100} - \frac{25}{100} = \frac{55}{100}.$$

De plus,

$$\mathbb{P}\left(B \mid A_3\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B} \mid A_3\right) = 1 - \frac{45}{100} = \frac{55}{100}.$$

Conclusion,

$$\mathbb{P}\left(A_2 \mid B\right) = \frac{\frac{55}{100}\frac{55}{100}}{\frac{15}{100}\frac{20}{100} + \frac{55}{100}\frac{55}{100} + \frac{55}{100}\frac{25}{100}} = \frac{275 + 2750}{300 + 275 + 2750 + 275 + 1100} = \frac{3025}{4700} = \frac{605}{940} = \frac{121}{188}$$

**Question 3.**

3.1 *Réponse rédigée :* On note $A$ l'évènement « obtenir un roi au premier tirage » et $B$ l'évènement « obtenir un roi au second tirage ». On cherche $\mathbb{P}\left(A \mid B\right)$. Par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A\right)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}\left(B \mid A\right)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$$

Au premier tirage, on a 4 rois parmi les 52 cartes. Donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52}$. Puis si l'on a tiré un roi au premier tirage, le tirage est sans remise, donc il en reste 3 parmi les 51 cartes restantes du jeu, donc $\mathbb{P}\left(B \mid A\right) = \frac{3}{51}$. Inversement, si l'on n'a pas tiré un roi au premier tirage, on a 4 chances sur les 51 cartes restantes de tirer un roi au second tirage. Donc $\mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \frac{4}{51}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \frac{\frac{3}{51}\frac{4}{52}}{\frac{3}{51}\frac{4}{52} + \frac{4}{51}\frac{4}{52}} = \frac{12}{12 + 16} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}.$$

3.2 *Réponse rédigée :* Pour $i \in \{1, 2\}$, on pose $A_i$ l'évènement « la cible est atteinte au lancer $i$ ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{40}{100}, \qquad \mathbb{P}(A_2) = \frac{75}{100}, \qquad \mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right) = \frac{90}{100}.$$

On cherche $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$. Or, par la formule de l'union puis par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right)\mathbb{P}(A_1)\\ &= \frac{40}{100} + \frac{75}{100} - \frac{90}{100}\frac{40}{100} = \frac{115}{100} - \frac{36}{100} = \frac{79}{100}.\end{aligned}$$

3.3 On pose $A$ l'évènement « la première carte est un trèfle », $B$ l'évènement « la deuxième carte est un carreau » et $C$ l'évènement « la troisième carte est un trèfle ». On cherche $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$. Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}\left(C \mid A \cap B\right)\mathbb{P}\left(B \mid A\right)\mathbb{P}(A) = \frac{7}{30}\frac{8}{31}\frac{8}{32} = \frac{7}{15 \times 31} = \frac{7}{5 \times 93} = \frac{7}{465}.$$

3.4 On pose $R$ « la boule tirée est rouge », $B$ « la boule tirée est bleue », $V$ « la boule tirée est verte » et $A$ « le résultat du dé est 4 ». On cherche $\mathbb{P}(A)$. Les évènements $R$, $B$, $V$ forment un systèmes complets d'évènements incompatibles. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A \mid R\right)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}\left(A \mid B\right)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A \mid V\right)\mathbb{P}(V)\\ &= \frac{1}{4}\frac{4}{15} + \frac{1}{6}\frac{6}{15} + \frac{1}{8}\frac{5}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{5}{120} = \frac{16 + 5}{120} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}.\end{aligned}$$

3.5 On pose $A$ l'évènement « le résultat du dé vert est 4 » et $B$ l'évènement « la somme des deux dés vaut 7 ». On cherche $\mathbb{P}\left(A \mid B\right)$. Par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A\right)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Or si l'on sait que $A$ est réalisé, le dé vert vaut 4 alors pour former 7, il faut nécessairement que l'autre dé vaille 3, ce qui se produit exactement une fois sur 6 : $\mathbb{P}\left(B \mid A\right) = \frac{1}{6}$. Enfin les issues de $B$ sont $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$ en notant le résultat du dé vert puis le résultat du dé rouge. Donc 6 issues possibles sur les $6^2 = 36$ issues possibles : $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Conclusion,

$$\mathbb{P}\left(A \mid B\right) = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}.$$

**Question 4.**

4.1 *Réponse rédigée :* Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\cos(n)}{n^3}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue entraine la convergence donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

4.2 *Réponse rédigée :* On sait que

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln^5(n)}{n-5}\right).$$

Donc il existe $n_0 \geqslant 6$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{\ln^5(n)}{n-5}.$$

De plus $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 6} \frac{\ln^5(n)}{n-5}$ diverge.

4.3 *Réponse rédigée :* Lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+3} - \sin\left(\frac{1}{2n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n}\frac{1}{1+\frac{3}{2n}} - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6}\frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} - \frac{3}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2n+3} - \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{4n^2}$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{3}{4n^2} < 0$ est de signe constant. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{3}{4n^2}$ converge également. Or d'après le cours, deux séries dont les termes sont équivalents et de signe constant sont de même nature. Conclusion, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n+3} - \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$ converge.

4.4 *Réponse rédigée :* On note que

$$\frac{\ln^5(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Donc il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \frac{\ln^5(n)}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln^5(n)}{n^2}$ converge.

4.5 *Réponse rédigée :* On sait que $n! \underset{n\to+\infty}{\ll} n^n$. Donc $\frac{n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^n}{n!}$ diverge grossièrement.

**Question 5.**

5.1 *Réponse rédigée :* On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}} &\underset{n\to+\infty}{=} n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1) - n - \frac{1}{2} + o(1)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -1 + o(1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}} = -1.$$

Donc par continuité de la fonction arccos en $-1$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \arccos\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}}\right) = \arccos(-1) = \pi \neq 0$$

i.e.

$$\arccos\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi.$$

5.2 On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\mathrm{sh}(x)} &\underset{x\to0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^{1/2} - \left(x + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^{1/2} \\
&\underset{x\to0}{=} \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)^{1/2} - \sqrt{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)^{1/2} \\
&\underset{x\to0}{=} \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right)\right) - \sqrt{x}\left(1 + \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x\to0}{=} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}x^2}{12} + o\left(\sqrt{x}x^2\right) - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}x^2}{12} + o\left(\sqrt{x}x^2\right) \\
&\underset{x\to0}{=} -\frac{\sqrt{x}x^2}{6} + o\left(\sqrt{x}x^2\right).
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\mathrm{sh}(x)} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{\sqrt{x}x^2}{6}.$$

5.3 On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}} - \frac{x(x+1)}{x^3} - 1 &\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}} - \frac{x^2+x}{x^3} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}} - \frac{x(x+1)}{x^3} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}.$$

5.4 On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1 &\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln(x)}+o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\right)} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x\left(\frac{1}{x\ln(x)}+o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\right)} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x)}+o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)} - 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{\ln(x)} + o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}.$$

5.5 On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-3} - \sqrt[3]{x^3+7x+1} &\underset{x\to+\infty}{=} \left(x^2-3\right)^{1/2} - \left(x^3+7x+1\right)^{1/3} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{1/2} - x\left(1+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x\left(1+\frac{7}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x-\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) - x - \frac{7}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{9+14}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\sqrt{x^2-3} - \sqrt[3]{x^3+7x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{23}{6x}.$$