Interrogation 24 d'entrainement
Intégration

1. **Enoncer un résultat du cours.**
    1.1 Définir une subdivision et une fonction en escalier.
    1.2 Théorème de Weierstrass et/ou son corollaire
    1.3 Propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité/croissance, séparation, relation de Chasles).
    1.4 Inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz.
    1.5 Théorème V.1, formulation de l'unique primitive de f à l'aide d'une intégrale.
    1.6 Enoncer la convergence des sommes de Riemann.
    1.7 Enoncer la formule de Taylor-Reste intégral.
2. **Convergence d'une somme de Riemann (exo7 TD23).**
    2.1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.
    2.2 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.
    2.3 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.
    2.4 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}$.
    2.5 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.
3. **Majorer/Minorer une intégrale.**
    3.1 Soit $a > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{e}^{-t^n}\cos\left(\sqrt{t}\right)\ln(t)}{1+2t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
    3.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
    3.3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_n^{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}}\, t^5\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
    3.4 Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}([0;a])$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^a \arctan\left(\mathrm{e}^{nt}+2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt}+3\right) f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
    3.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
4. **Formule de Taylor.**
    4.1 Enoncer en justifiant la formule de Taylor à l'ordre n pour la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}$.
    4.2 Enoncer en justifiant la formule de Taylor à l'ordre $2n$ pour la fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}$.
    4.3 Enoncer en justifiant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction $f : t \mapsto \tan(t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
    4.4 Enoncer en justifiant la formule de Taylor à l'ordre n pour la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ aux points $a = 0$ et $b = x \in]-1; +\infty[$.
    4.5 Enoncer en justifiant la formule de Taylor à l'ordre $2n$ pour la fonction $f : t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ aux points $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

5. **Faire une intégration par parties ou un changement de variable.**

5a.1 Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 t \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.

5a.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $I = \displaystyle\int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

5a.3 Par une double intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

5b.1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $I = \displaystyle\int_0^a \cos\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

5b.2 Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \tan^3(x)\,\mathrm{d}x$.

5b.3 Calculer $I = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}$.

Question 2.

2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}.$$

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;1]$. Or on reconnait une somme de Riemann d'ordre n de f sur $[0;1]$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right).$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi}{4}.$$

2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Posons $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right).$$

On reconnait une somme de Riemann. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \ln(2).$$

2.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}.$$

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right).$$

On reconnait donc une somme de Riemann. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2t}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+2t}\right]_{t=0}^{t=1} = \sqrt{3}-1.$$

2.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Posons $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right).$$

On reconnait donc une somme de Riemann et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1-\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [t-\arctan(t)]_{t=0}^{t=1} = 1-\frac{\pi}{4}.$$

2.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Donc on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(n+1)\times\cdots\times(2n)}{n^n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right).$$

On reconnait donc une somme de Riemann. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $s = 1+t$, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_1^2 \ln(s)\,\mathrm{d}s = [s\ln(s) - s]_{s=1}^{s=2} = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$. Donc par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{2\ln(2)-1} = 4\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Question 3.

3.1 Soit $a > 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{e}^{-t^n} \leqslant 1$ et $1 + 2t^n \geqslant 1$ donc

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \frac{\mathrm{e}^{-t^n}}{1+2t^n} \leqslant 1.$$

Or par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|I_n| \leqslant \int_1^a \left|\frac{\mathrm{e}^{-t^n}\cos\left(\sqrt{t}\right)\ln(t)}{1+2t^n}\right|\mathrm{d}t = \int_1^a \frac{\mathrm{e}^{-t^n}\left|\cos\left(\sqrt{t}\right)\right|\left|\ln(t)\right|}{1+2t^n}\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$|I_n| \leqslant \int_1^a \left|\cos\left(\sqrt{t}\right)\right|\left|\ln(t)\right|\mathrm{d}t \qquad \leftarrow \text{indépendant de } n$$

En posant $M = \int_1^a \left|\cos\left(\sqrt{t}\right)\right|\left|\ln(t)\right|\mathrm{d}t$, on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|I_n| \leqslant M$$

et donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

NB : on pouvait aussi continuer de majorer M par $\ln(a)\,(a-1)$ ou $a\ln(a) - a + 1$ par exemple.

3.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0;1]$, on a $1 + t \geqslant 1$ et donc

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t} \leqslant \mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right).$$

Méthode 1. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t = \left[n\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = n\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

Or

$$n\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc par encadrement, on en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

Méthode 2. La fonction sh est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $t\in[0;1]$, et tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t} \leqslant \operatorname{sh}\left(\frac{t}{n}\right) \leqslant \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}t = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc par encadrement, on en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

NB : on a même montré que $I_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

3.3 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et $t\in\left[n;n^2\right]$, $0\leqslant t^5\leqslant n^{10}$ et donc $0\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}}t^5 \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}}n^{10}$. Par croissance de l'intégrale, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leqslant I_n \leqslant \int_n^{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} n^{10}\,\mathrm{d}t = n^{10}\left[-\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}}\right]_{t=n}^{t=n^2} = n^{10}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{-\frac{n}{\sqrt{n}}} - \mathrm{e}^{-\frac{n^2}{\sqrt{n}}}\right) = n^{10}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} - \mathrm{e}^{-n^{3/2}}\right).$$

Par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^{10}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} - \mathrm{e}^{-n^{3/2}}\right) = 0.$$

Donc par encadrement la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

3.4 Soient $a>0$ et $f\in\mathscr{C}([0;a])$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$, on a

$$0\leqslant \arctan\left(\mathrm{e}^{nt}+2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt}+3\right) \leqslant \frac{\pi}{2}(1+3) = 2\pi.$$

Donc par l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$|I_n| \leqslant \int_0^a \left|\arctan\left(\mathrm{e}^{nt}+2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt}+3\right)f(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a 2\pi\,|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Posons $M = 2\pi\int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t$ qui est bien un réel indépendant de n. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$0\leqslant |I_n| \leqslant M$$

i.e. la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3.5 Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(t)\geqslant 1$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\left[\frac{1}{n};1\right]$, on a

$$\frac{\operatorname{ch}(t)}{t} \geqslant \frac{1}{t}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$I_n \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_{t=\frac{1}{n}}^{t=1} = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n).$$

Or $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc par minoration, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty.$$

Question 4.

4.1 Soient $f : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0;x]$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f^{(k)}(t) = 2^k\,\mathrm{e}^{2t}\,.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 2^k$. Donc par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{e}^{2x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!} + 2^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

4.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $[0;x]$ ou $[x;0]$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(2k)}(t) = (-1)^k\cos(t), \qquad \text{et} \qquad f^{(2k+1)}(t) = (-1)^k\sin(t).$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \qquad \text{et} \qquad f^{(2k+1)}(t) = 0.$$

Donc par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}
\cos(x) = f(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1} + (-1)^n\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + (-1)^n\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\sin(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

4.3 Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente est $\mathscr{C}^\infty$ donc $\mathscr{C}^3$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc sur $[0;x]$ ou $[x;0]$. De plus pour tout $t \in [0;x]$,

$$\begin{aligned}
\tan'(t) &= 1 + \tan^2(t) \\
\tan''(t) &= 2\tan'(t)\tan(t) = 2\tan(t) + 2\tan^3(t) \\
\tan^{(3)}(t) &= 2 + 2\tan^2(t) + 6\tan'(t)\tan^2(t) = 2 + 8\tan^2(t) + 6\tan^4(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \tan(0) + \tan'(0)x + \tan''(0)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\tan^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\left(2 + 8\tan^2(t) + 6\tan^4(t)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

4.4 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-1;+\infty\right[$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-1;+\infty\right[$ donc $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0;x]$ ou $[x;0]$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall t \in [0;x], \qquad f^{(k)}(t) = \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{(1+t)^{k+1}} = \frac{(-1)^k k!}{(1+t)^{k+1}}$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k k!.$$

Donc par la formule de Taylor avec un reste intégral,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} = f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+t)^{n+2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+2}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

4.5 La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $[a;b]$ (ou $[b;a]$). De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [a;b], \qquad f^{(2k)}(t) = \mathrm{ch}(t) \qquad \text{et} \qquad f^{(2k+1)}(t) = \mathrm{sh}(t).$$

Donc par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(b) = f(b) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(a)}{(2k)!}(b-a)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k+1)}(a)}{(2k+1)!}(b-a)^{2k+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{ch}(a)\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{sh}(a)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Question 5.

5a.1 Posons pour tout $t \in [0;1]$, $u(t) = \frac{t^2}{2}$ et $v(t) = \arctan(t)$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $t \in [0;1]$, $u'(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 t\arctan(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\arctan(t)\right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int 0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[t - \arctan(t)\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5a.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $t \in [0;x]$ (ou $[x;0]$) $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t$. Alors u et v sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[0;x]$ et pour tout $t \in [0;x]$, $u'(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = 1$. Donc par intégration par parties,

$$I = \int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t = [t\sin(t)]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x) - 1.$$

5a.3 Posons pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $u(t) = -\cos(t)$ et $v(t) = \mathrm{e}^{2t}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = 2\,\mathrm{e}^{2t}$. Donc par intégration par parties,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(t) = \sin(t)$ et toujours $v(t) = \mathrm{e}^{2t}$. Les fonctions w et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $w'(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = 2\,\mathrm{e}^{2t}$. Donc par intégration par parties,

$$I = 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\left[\sin(t)\,\mathrm{e}^{2t}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\,\mathrm{e}^{\pi} - 4I.$$

De cette équation, on en déduit que

$$5I = 1 + 2\,\mathrm{e}^{\pi} \qquad \Leftrightarrow \qquad I = \frac{1+2\,\mathrm{e}^{\pi}}{5}.$$

Autre méthode : on écrit $\sin(t) = Im\left(\mathrm{e}^{it}\right)$ *et on intègre la fonction complexe* e^{2t+it} *:*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} Im\left(\mathrm{e}^{2t+it}\right)\mathrm{d}t = Im\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t+it}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= Im\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{2t+it}}{2+i}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\right) = Im\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi} i - 1}{2+i}\right) = Im\left(\frac{(2-i)\left(\mathrm{e}^{\pi} i - 1\right)}{5}\right) = \frac{2\,\mathrm{e}^{\pi}+1}{5}.
\end{aligned}$$

5b.1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $u = \sqrt{x}$ alors $x = u^2$ et $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. Donc par le changement de variable $u = \sqrt{x}$, on a

$$I = \int_0^a \cos\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{a}} u\cos(u)\,\mathrm{d}u.$$

Posons pour tout $u \in [0;a]$ (ou $[a;0]$) $f(u) = \sin(u)$ et $g(u) = u$. Les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;a]$ et pour tout $u \in [0;a]$ $f'(u) = \cos(u)$ et $g'(u) = 1$. Donc par intégration par parties,

$$I = 2\left[u\sin(u)\right]_{u=0}^{u=a} - 2\int_0^a \sin(u)\,\mathrm{d}u = 2a\sin(a) + 2\cos(a) - 2.$$

5b.2 Posons $u = \tan(x)$ donc $x = \arctan(u)$ et $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Donc par le changement de variable $u = \tan(x)$, on a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u^3}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u\left(u^2+1-1\right)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u - \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)\right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{4}}.$$

Donc

$$I = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)$$

5b.3 Posons $x = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$ et alors $t = \ln\left(x^2+1\right)$ et $\mathrm{d}t = \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Donc par la changement de variable $x = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a

$$I = \int_{\sqrt{2-1}}^{\sqrt{4-1}} \frac{1}{x}\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(1)\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$