Interrogation 25 d'entrainement
Représentation matricielle

1. **Enoncer un résultat du cours.**
   1.1 Définir la matrice de la famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$ dans une base $\mathscr{B}$.
   1.2 Définir la matrice de f dans deux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
   1.3 Enoncer le théorème d'isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   1.4 Enoncer la traduction matricielle de l'égalité $y=f(x)$.
   1.5 Donner la matrice de la composition.
   1.6 Caractériser par les matrices le fait d'être un isomorphisme.
   1.7 Caractériser par les matrices le fait d'être une base.
   1.8 A l'aide d'une matrice de passage exprimer la matrice d'un vecteur dans une nouvelle base.
   1.9 Enoncer la formule de changement base pour une application linéaire.
   1.10 Caractériser l'inversibilité d'une matrice.
2. **Matrice d'une application linéaire.**
   2.1 On pose $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[X]$, $(a,b,c)\mapsto(2a+b)X^2+(a-3b+c)X+\frac{b}{5}-4c$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
   2.2 On admet que $\mathscr{B}=(t\mapsto \mathrm{ch}(t), t\mapsto \mathrm{sh}(t), t\mapsto 3)$ forme une base de $E=\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$. On pose $\varphi:E\to E$, $f\mapsto f'-1$. On admet que $\varphi\in\mathscr{L}(E)$. Déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}$.
   2.3 On pose $f:\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, $M\mapsto M\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques que l'on spécifiera.
   2.4 On pose $f:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}^3$, $P\mapsto(P(0),P'(0),P''(0))$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
   2.5 On pose $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}^4$, $(x,y)\mapsto(\mathrm{Re}(x),\mathrm{Im}(x),\mathrm{Re}(y),\mathrm{Im}(y))$ où $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
3. **Matrice de passage.**
   3.1 Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $e_1=(3,1)$, $e_2=(5,2)$, $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ (dans ce sens).
   3.2 Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathscr{C}=(e_x,e_y)$ la base canonique et on pose $e_r=\cos(\theta)e_x+\sin(\theta)e_y$ et $e_\theta=-\sin(\theta)e_x+\cos(\theta)e_y$. On fixe $\theta=\frac{\pi}{4}$. Montrer que $\mathscr{B}=(e_r,e_\theta)$ est une base et calculer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
   3.3 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\mathscr{B}=\left(1,X-1,(X-1)^2\right)$ et $\mathscr{C}$ la base canonique. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
   3.4 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\mathscr{B}_1=(X+1,X+2)$ et $\mathscr{B}_2=(2X+1,3X+1)$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des bases et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.
   3.5 Soit E un espace vectoriel et (e_1,e_2) une base de E. On pose $\mathscr{B}_1=\left(\frac{e_1+e_2}{2},\frac{e_1-e_2}{2}\right)$ ainsi que $\mathscr{B}_2=(2e_1-e_2,e_1+3e_2)$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases de E et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.
4. **Formule de changement de base.**
   4.1 Soient $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_4$ quatre bases et f une application linéaire. On donne

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&3\end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{B}_1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_4)=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_4}(\mathscr{B}_2)=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}.$$

   Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f)$.

4.2 Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et f un endomorphisme. On donne

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}5&-4&2\\14&-10&4\\16&-10&3\end{pmatrix},\quad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&1\\1&2&2\end{pmatrix},\quad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\3&-2&1\\-2&1&0\end{pmatrix}.$$

Calculer $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

4.3 Soient $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé dans $\mathbb{R}^3$. On pose $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,1,0)$ et $e_3=(-2,0,0)$. Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ et en déduire $\operatorname{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f)$.

4.4 Soient $M=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&1&0\\1&0&2&-1\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé dans $\mathbb{R}^3$. On pose $e_1=(1,1,0,0)$, $e_2=(0,0,1,1)$, $e_3=(0,1,0,0)$ et $e_4=(0,0,0,1)$. Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ et en déduire $\operatorname{mat}_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(f)$.

4.5 On considère $f\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=(x-y+3z,2y+z)$. On pose $\mathscr{B}_3=((1,0,0),(-1,1,0),(1,-3,2))$, $\mathscr{B}_2=((-1,1),(5,-2))$, $\mathscr{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On donne

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{C}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{C}_2)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&5\\1&1\end{pmatrix}$$

Déterminer $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f)$.

5. **Polynômes d'endomorphisme.**

5.1 Soient E un espace vectoriel et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2=f^4$. On pose $g=\mathrm{Id}_E+f$ et $h=f^2-f^3$. Calculer $g\circ f$.

5.2 Soient E un espace vectoriel et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^n=0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose $g=\mathrm{Id}_E+f$ et $h=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k f^k$. Calculer $g\circ h$.

5.3 Soient E un espace vectoriel et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2=4f-4\mathrm{Id}_E$. Calculer $(f-2\mathrm{Id}_E)^3$.

5.4 *cf DS7.* Soient E un espace vectoriel et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2-4f+3\mathrm{Id}_E=0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose $g=\frac{3}{2}\mathrm{Id}_E-\frac{1}{2}f$ et $h=\mathrm{Id}_E-g$. Calculer $g\circ h$.

5.5 *cf DS7.* Soient E un espace vectoriel et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2-4f+3\mathrm{Id}_E=0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose $g=\frac{3}{2}\mathrm{Id}_E-\frac{1}{2}f$. Calculer g^2.

Question 2.

2.1 On a $f(1,0,0) = 2X^2 + X$, $f(0,1,0) = X^2 - 3X + \frac{1}{5}$ et $f(0,0,1) = X - 4$. Ainsi en notant $\mathscr{C}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}_2 = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2.2 On pose $e_1 : t \mapsto \operatorname{ch}(t)$, $e_2 : t \mapsto \operatorname{sh}(t)$ et $e_3 : t \mapsto 3$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e_1'(t) - 1 = \operatorname{sh}(t) = e_2(t) - \frac{e_3(t)}{3}, \qquad e_2'(t) - 1 = \operatorname{ch}(t) - \frac{e_3(t)}{3}, \qquad e_3'(t) - 1 = -\frac{e_3(t)}{3}.$$

Par conséquent, $\varphi(e_1) = e_2 - \frac{1}{3}e_3$, $\varphi(e_2) = e_1 - \frac{1}{3}e_3$, $\varphi(e_3) = -\frac{1}{3}e_3$. On en déduit que

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.}$$

2.3 Soient $\mathscr{C}_1$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\boxed{\mathscr{C}_1 = (E_1, E_2, E_3, E_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

On a alors $f(E_1) = (1,0)$, $f(E_2) = (1,0)$, $f(E_3) = (0,1)$ et $f(E_4) = (0,1)$. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2.4 On a les égalités suivantes dans $\mathbb{R}^3$:

$$f(1) = (1,0,0), \qquad f(X) = (0,1,0), \qquad f\left(X^2\right)\left(0^2, 2 \times 0, 2\right) = (0,0,2).$$

Par conséquent, en notant $\mathscr{C}_1$, respectivement $\mathscr{C}_2$, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, respectivement de $\mathbb{R}^3$, on obtient

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

2.5 On pose $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y) \mapsto (\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x), \operatorname{Re}(y), \operatorname{Im}(y))$ où $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Lorsque $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel sa base canonique est donnée par $= ((1,0), (0,1))$. De plus

$$f(1,0) = (1,0,0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,1) = (0,0,1,0).$$

En notant $\mathscr{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on obtient alors

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Bonus ! Lorsque $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sa base canonique est donnée par $\mathscr{B} = ((1,0), (i,0), (0,1), (0,i))$ alors

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

Autrement dit l'isomorphisme entre $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{R}^4$ est trivial.

Question 3.

3.1 La famille $\mathscr{B}$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires donc libre. De plus $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Posons

$$P = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{array}{lll} P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

On retrouve bien que P est inversible puisque $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$, que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

3.2 Oh ! Le changement de coordonnées polaires. Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, alors $e_r = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_x + e_y)$ et $e_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_x + e_y)$. Posons

$$P = \operatorname{mat}_{e_x,e_y}(\mathscr{B}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{array}{lll} P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \sqrt{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 \end{array} & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc P est inversible or $\mathscr{C}$ est une base et $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base}}$. De plus,

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Autre méthode. Les vecteurs e_r et e_θ ne sont pas colinéaires et $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus en notant

$$e_r = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_x + e_y) \qquad (1)$$

$$e_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_x + e_y) \qquad (2)$$

Alors en faisant (1)+(2), on a $e_r + e_\theta = \sqrt{2}e_y$ i.e. $e_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_r + e_\theta)$. De même en faisant (1)−(2), $e_r - e_\theta = \sqrt{2}e_x$ i.e. $e_x = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_r - e_\theta)$. Ainsi, on retrouve

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3 $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes échelonnés en leurs degré. Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$. Posons

$$P = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve que la matrice est échelonnée et donc inversible. Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned} P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z = a \\ y - 2z = b \\ z = c \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a + y - z = a + b + 2c - c = a + b + c \\ y = b + 2z = b + 2c \\ c = z \end{cases} . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3.4 Les vecteurs $X+1$ et $X+2$ ne sont pas colinéaires et donc $\mathscr{B}_1$ est libre. Or $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_1) = 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$. De même pour $\mathscr{B}_2$. Donc $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases de $\mathbb{R}_1[X]$. On cherche les coordonnées de $2X+1$ dans $\mathscr{B}_1$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2X + 1 = \lambda(X+1) + \mu(X+2) \quad & \Leftrightarrow \quad 2X + 1 = (\lambda + \mu)X + (\lambda + 2\mu) \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \mu = -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $2X+1 = 3(X+1) - (X+2)$. De même, on cherche les coordonnées de $3X+1$ dans $\mathscr{B}_1$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 3X + 1 = \lambda(X+1) + \mu(X+2) \quad & \Leftrightarrow \quad 3X + 1 = (\lambda + \mu)X + (\lambda + 2\mu) \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \mu = -2 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $3X+1 = 5(X+1) - 2(X+2)$. Finalement

$$\boxed{P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

N.B. : on pouvait aussi passer par la base canonique par l'égalité bien connue

$$P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}} P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_2} = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1} P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_2}.$$

3.5 On note $u_1 = \frac{e_1+e_2}{2}$, $u_2 = \frac{e_1-e_2}{2}$, $v_1 = 2e_1 - e_2$ et $v_2 = e_1 + 3e_2$. Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires car (e_1, e_2) forme une famille libre. Donc $\mathscr{B}_1$ est libre. De plus Card $(\mathscr{B}_1) = 2 =$ Card $(e_1, e_2) = \dim(E)$. Donc $\mathscr{B}_1$ est une base de E. De même $\mathscr{B}_2$ est une base de E. On observe que

$$e_1 = u_1 + u_2 \qquad \text{et} \qquad e_2 = u_1 - u_2.$$

Par conséquent,

$$v_1 = 2(u_1+u_2) - (u_1-u_2) = u_1 + 3u_2 \qquad \text{et} \qquad v_2 = u_1 + u_2 + 3(u_1 - u_2) = 4u_1 - 2u_2.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.}$$

Question 4.

4.1 Par la formule du cours, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_4}(\mathrm{Id}) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_1}(\mathrm{Id}) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_4}(\mathscr{B}_2) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_3).$$

Donc d'après les données,

$$\begin{aligned}
\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f) &= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -25 & -21 & -22 \\ 10 & 9 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} -25 & -21 & -22 \\ 10 & 9 & 4 \end{pmatrix}.}$$

4.2 Par la formule du cours,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').$$

Donc par les données,

$$\begin{aligned}
\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

4.3 On a $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2$. De la même façon, $f(e_2) = (1,1,0) = e_2$ et $f(e_3) = (-2,0,0) = e_3$.
Par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4.4 On a

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1 + e_2.$$

De même, on observe que $f(e_2) = (1,1,1,1) = e_1+e_2$, $f(e_3) = (0,2,0,0) = 2e_3$ et $f(e_4) = (0,1,0,-1) = e_3-e_4$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

4.5 On a d'après la définition de f,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la formule de changement de base du cours,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_2,\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})\,\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_2}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{C}_3}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{C}_2)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_2}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3}(\mathscr{B}_3).$$

Or par définition de $\mathscr{B}_3$,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3}(\mathscr{B}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

NB : il est facile de vérifier que $mat_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{C}_3) = mat_{\mathscr{C}_3}(\mathscr{B}_3)^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.}$$

Question 5.

5.1 Par linéarité de f et de Id_E, on a les égalités suivantes dans $\mathscr{L}(E)$,

$$g \circ f = (\mathrm{Id}_E + f) \circ \left(f^2 - f^3\right) = f^2 - f^3 + f^3 - f^4 = f^2 - f^4 = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \textit{car } f^4 = f^2.$$

5.2 on a les égalités suivantes dans $\mathscr{L}(E)$,

$$\begin{aligned} g \circ h &= (\mathrm{Id}_E + f) \circ \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f^k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f^k - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} f^{k+1}. \end{aligned}$$

Par le changement d'indice $\tilde{k} = k+1$ dans la seconde somme,

$$g \circ h = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f^k - \sum_{k=2}^{n} (-1)^k f^k = -f - (-1)^n f^n.$$

Or par hypothèse, $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc

$$\boxed{g \circ h = -f}.$$

5.3 Puisque $f^2 = 4f - 4\mathrm{Id}_E$, on en déduit que $f^2 - 4f + 4\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$ i.e. $(f - 2\mathrm{Id}_E)^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc en composant par $f - 2\mathrm{Id}_E$, on obtient

$$(f - 2\mathrm{Id}_E)^3 = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E)^2 = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ 0_{\mathscr{L}(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

5.4 *cf DS7.*

5.5 *cf DS7.*