Interrogation 26 d'entrainement
Variables Aléatoires

1. **Enoncer un résultat du cours.**
   1.1 Définir une variable aléatoire.
   1.2 Définir $(X \leqslant x)$.
   1.3 Donner un système complet d'évènements incompatibles lié à un couple de variables aléatoires.
   1.4 Définir la loi conjointe. La loi marginale.
   1.5 Propriété liée au calcul pratique d'une loi marginale connaissant la loi conjointe.
   1.6 Définir la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.
   1.7 Définir l'indépendance de X et Y.
   1.8 Définir l'espérance, la variance, la covariance.
   1.9 Théorème de transfert.
   1.10 Formule de Koenig-Huygens.
   1.11 Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.
   1.12 Loi de deux lois binomiales.
   1.13 Loi de n lois de Bernoulli.
2. **Espérance et probabilités.**
   2.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$. Refaire le calcul de l'espérance et la variance de X et en déduire l'inégalité de Beinaymé-Tchebychev associée.
   2.2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.
   2.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0;n-1 \rrbracket)$ et $Y_n = \cos\left(\frac{X}{n}\right)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.
   2.4 On se munit d'une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in [0;1]$. On lance de façon indépendante n fois la pièce et on note X le rang d'apparition du premier pile. On pose $X = 0$ si sur les n-lancers nous n'avons eu aucun pile. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ puis pour tout $k \in \llbracket 1;n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k)$.
   2.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant p)$.
3. **Manipuler un couple de variables aléatoires.**
   3.1 On pioche de façon indépendante deux nombres dans l'ensemble $\{-1;1\}$. On note X la somme et Y le produit. Donner sans justification la loi conjointe de X et Y dans un tableau. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.
   3.2 Soit $a > 0$. On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\llbracket 1;n \rrbracket^2$ dont la loi conjointe est donnée pour tout $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ par $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}$. Déterminer les lois marginales en fonction de a (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
   3.3 Soient $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1;3 \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(3,p)$. On suppose X et Y indépendantes. Donner sans justification la loi conjointe de (X,Y) sous forme de tableau.
   3.4 Soient $(p_1,p_2) \in [0;1]$, $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p_1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p_2)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On pose $Y = \varepsilon X_1 + (1-\varepsilon) X_2$. On suppose ε indépendant de X_1 et de X_2. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
   3.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On suppose X et ε indépendants. On pose $Y = (-1)^{\varepsilon} X$. Calculer $\mathbb{P}(Y = -1)$.

4. **Reconnaitre une loi usuelle.**
   4.1 On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X.
   4.2 On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as cœur. X est le nombre de cartes que l'on a retournées. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X.
   4.3 On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X.
   4.4 On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes avec remise. X la variable aléatoire réelle égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X.
   4.5 On considère qu'en moyenne dans une classe de 45 étudiants, il y a 5 gauchers. On sait que 6 personnes font allemand. X est le nombre de gauchers parmi les germanistes. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X.
5. **Reconnaitre une transformation complexe.**
   5.1 Soit $f : z \mapsto z - 1 + 3i$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   5.2 Soit $f : z \mapsto iz + 1 - i$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   5.3 Soit $f : z \mapsto \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   5.4 Soit $f : z \mapsto \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + i + \sqrt{3}$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   5.5 Soit $f : z \mapsto (1+i)\,z$. A quelle transformation du plan correspond f ?

Question 2.

2.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. On a par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

De plus

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc par la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{3(n+1)^2}{12} \\ &= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{12}.\end{aligned}$$

Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{(n+1)(n-1)}{12\,\varepsilon^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{(n+1)(n-1)}{12\,\varepsilon^2}.}$$

2.2 Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1-p)$. Donc, on a $\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{np}{n} = p$ et $\mathbb{V}\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$. Donc par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliqué à la variable aléatoire $Y = \frac{X_n}{n}$, on a

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n}.$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0.}$$

L'inégalité précédente est un grand classique de la statistique et permet de construire un intervalle de confiance autour du paramètre p. La convergence obtenue est la démonstration de la loi faible des grands nombres dans le cas binomiale et affirme que la moyenne empirique/mesurée $\frac{X_n}{n}$ converge en probabilité vers la moyenne théorique p.

2.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0; n-1 \rrbracket)$ et $Y_n = \cos\left(\frac{X}{n}\right)$. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} \cos\left(\frac{x}{n}\right)\mathbb{P}(X_n = x) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right),$$

car la probabilité est uniforme. Ne serait-ce pas notre cher Riemann qui vient se joindre à nous ? La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $[0; 1]$, on reconnait donc bien une somme de Riemann entre $[0; 1]$ d'ordre n. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)]_{x=0}^{x=1} = \sin(1).}$$

2.4 On note A_i l'évènement « obtenir pile au i-ième lancer ». On remarque alors que

$$(X = 0) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}.$$

Les lancers sont indépendants, donc les A_i et donc les $\overline{A_i}$ sont mutuellement indépendants. Donc,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = (1-p) \times \cdots \times (1-p) = (1-p)^n.$$

Par un raisonnement similaire, on a, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,

$$(X = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(\overline{A_{k-1}}\right) \times \mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1} p.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^n \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p.}$$

NB : on vérifie facilement que $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$.

2.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; n]\!])$ et $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant p) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n} = \frac{p}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{p}{n} = 0.}$$

Question 3.

3.1 On note X_1 le résultat du premier tirage et X_2 le résultat du second tirage. On observe que si $X_1 = X_2 = -1$ alors $X = -2$ et $Y = 1$, si $X_1 = -1$ et $X_2 = 1$, alors $X = 0$ et $Y = -1$, si $X_1 = 1$ et $X_2 = -1$, alors $X = 0$ et $Y = -1$ et enfin si $X_1 = X_2 = 1$, alors $X = 2$ et $Y = 1$. Par conséquent $X(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$. De plus, par indépendance de X_1 et X_2,

$$\mathbb{P}((X, Y) = (-2, -1)) = 0$$

$$\mathbb{P}((X, Y) = (-2, 1)) = \mathbb{P}((X_1 = -1) \cap (X_2 = -1)) = \mathbb{P}(X_1 = -1)\,\mathbb{P}(X_2 = -1) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X, Y) = (0, -1)) &= \mathbb{P}([(X_1 = -1) \cap (X_2 = 1)] \sqcup [(X_1 = 1) \cap (X_2 = -1)]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = -1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = -1) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}((X, Y) = (0, 1)) \quad = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}((X, Y) = (2, -1)) = 0$$

$$\mathbb{P}((X, Y) = (2, 1)) = \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{4}.$$

D'où,

$Y \backslash X$	-2	0	2
-1	0	$\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

On remarque en particulier que $\mathbb{P}((X = -2) \cap (Y = -1)) = 0$. Or par la formule des probabilités totales (ce qui revient à sommer la première ligne),

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}((X = -2) \cap (Y = -1)) + \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = -1)) + \mathbb{P}((X = 2) \cap (Y = -1)) = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

De plus toujours par la formule des probabilités totale (sommation de la première colonne),

$$\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}((X = -2) \cap (Y = -1)) + \mathbb{P}((X = -2) \cap (Y = 1)) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = -1)\,\mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq 0 = \mathbb{P}((X = -2) \cap (Y = -1)).$$

Conclusion, $\boxed{\text{les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

3.2 Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On a par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{a}{2^{i+1}}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \frac{a}{2^{i+1}}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

On reconnait une somme géométrique de raison $1/2 \neq 1$, donc,

$$\mathbb{P}(X=i) = \frac{a}{2^{i+1}}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(X=i) = \frac{a}{2^i}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).}$$

Exactement de la même façon, (par symétrie des hypothèses sur X et Y), on obtient également

$$\boxed{\forall j \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(X=j) = \frac{a}{2^j}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).}$$

NB : a est la constante de normalisation pour faire en sorte que $\mathbb{P}$ soit bien une probabilité : il faut que

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=i) = a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} = a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} = a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

Par conséquent,

$$a = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2}.$$

Avec cette donnée, on peut se demander si X et Y sont indépendants ou non. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on a

$$\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j) = \frac{a}{2^i}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \times \frac{a}{2^j}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \frac{a^2}{2^{i+j}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{a}{2^{i+j}} = \mathbb{P}((X,Y)=(i,j)).$$

Donc X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

3.3 D'après le cours, on a $X(\Omega) = [\![1;3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0;3]\!]$. De plus par indépendance, pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!] \times [\![0;3]\!]$, on a

$$\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{3}\binom{3}{j}p^j(1-p)^{3-j}.$$

On obtient alors le tableau suivant :

$X\backslash Y$	0	1	2	3
1	$(1-p)^3/3$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p^3/3$
2	$(1-p)^3/3$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p^3/3$
3	$(1-p)^3/3$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p^3/3$

3.4 On sait que $(\varepsilon=0)$ et $(\varepsilon=1)$ forme un système complet d'évènements incompatibles. Donc d'après la formule des probabilité totale :

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y=0 \mid \varepsilon=0)\,\mathbb{P}(\varepsilon=0) + \mathbb{P}(Y=0 \mid \varepsilon=1)\,\mathbb{P}(\varepsilon=1).$$

Puisque ε est une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, $\mathbb{P}(\varepsilon=0) = \mathbb{P}(\varepsilon=1) = \frac{1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(0\times X_1 + (1-0)X_2 = 0 \mid \varepsilon=0)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(1\times X_1 + (1-1)X_2 = 0 \mid \varepsilon=1)\frac{1}{2}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X_2=0 \mid \varepsilon=0) + \mathbb{P}(X_1=0 \mid \varepsilon=1)}{2}.\end{aligned}$$

Or par hypothèse, ε est indépendant de X_1 et de X_2. Donc

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{\mathbb{P}(X_2=0) + \mathbb{P}(X_1=0)}{2} = \frac{1-p_2+1-p_1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=0) = 1 - \frac{p_1+p_2}{2}.}$$

3.5 Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y=-1)=\mathbb{P}(Y=-1 \mid \varepsilon=0)\,\mathbb{P}(\varepsilon=0)+\mathbb{P}(Y=-1 \mid \varepsilon=1)\,\mathbb{P}(\varepsilon=1).$$

Comme $\varepsilon \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$,

$$\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{\mathbb{P}(X=-1 \mid \varepsilon=0)+\mathbb{P}(-X=-1 \mid \varepsilon=1)}{2}=\frac{\mathbb{P}(X=-1 \mid \varepsilon=0)+\mathbb{P}(X=1 \mid \varepsilon=1)}{2}.$$

Par indépendance de ε et de X,

$$\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=1)}{2}.$$

Or X est une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ donc $\mathbb{P}(X=-1)=0$ et $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{n}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{1}{2n}.}$$

Question 4.

4.1 On suppose chaque tirage indépendant. Le fait de placer un objet en case 1 sera considéré comme un succès et son contraire un échec. La probabilité d'obtenir un succès est de $p=1/3$. On répète cette expérience de Bernoulli $n=20$ fois. Le nombre total de succès est donc une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre $n=20$ et $p=1/3$. Par conséquent,

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(20, \frac{1}{3}\right), \qquad X(\Omega)=[\![0;20]\!], \qquad \mathbb{E}(X)=np=\frac{20}{3}, \qquad \mathbb{V}(X)=np(1-p)=\frac{40}{9}.}$$

4.2 Attention il ne s'agit pas d'une loi binomiale car l'obtention d'un succès (avoir l'as de cœur) au retournement numéro i n'est pas indépendant de l'obtention d'un succès au numéro j (il n'y a pas remise). Cependant les cartes étant mélangées, la position de l'as de cœur, et donc le nombre de cartes retournées, est équiprobable sur les 32 positions. Donc X est une variable aléatoire uniforme sur $[\![1;32]\!]$:

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;32]\!]), \qquad X(\Omega)=[\![1;32]\!], \qquad \mathbb{E}(X)=\frac{n+1}{2}=\frac{33}{2}}$$

et

$$\boxed{\mathbb{V}(X)=\frac{(n-1)(n+1)}{12}=\frac{31\times 33}{12}=\frac{31\times 11}{4}=\frac{341}{4}.}$$

4.3 On suppose également les probabilités indépendantes. On a $p=\frac{1}{2}$ la probabilité d'avoir un garçon et l'on répète trois fois l'expérience $n=3$. Donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3, \frac{1}{2}\right), \qquad X(\Omega)=[\![0;3]\!], \qquad \mathbb{E}(X)=np=\frac{3}{2}, \qquad \mathbb{V}(X)=np(1-p)=\frac{3}{4}.}$$

4.4 On suppose toujours les tirages indépendants. Le succès « obtenir un roi » a un probabilité de $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. On répète $n=5$ fois l'expérience. Donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \frac{1}{13}\right), \qquad X(\Omega)=[\![0;5]\!], \qquad \mathbb{E}(X)=np=\frac{5}{13}, \qquad \mathbb{V}(X)=np(1-p)=\frac{5\times 12}{13^2}=\frac{60}{169}.}$$

4.5 Puisqu'*en moyenne* 5 personnes sur 45 sont gauchers, si on choisit au hasard une personne, nous avons $p=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$ d'obtenir un gaucher. Si l'on répète $n=6$ fois cette expérience, on obtient alors une loi binomiale de paramètre $n=6$ et $p=\frac{1}{9}$:

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(6, \frac{1}{9}\right), \qquad X(\Omega)=[\![0;6]\!], \qquad \mathbb{E}(X)=np=\frac{2}{3}, \qquad \mathbb{V}(X)=np(1-p)=\frac{6\times 8}{81}=\frac{16}{27}.}$$

Question 5.

5.1 Soit $f : z \mapsto z - 1 + 3i$. On reconnait alors directement $\boxed{\text{une translation de vecteur d'affixe } -1+3i}$.

5.2 Soit $f : z \mapsto iz + 1 - i$. Ici $a = i \neq 1$. Donc f est une similitude avec un unique point fixe. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a

$$f(\omega) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = i\,\omega + 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad \omega(1-i) = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 1.$$

En posant $\omega = 1$, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = i(z-\omega) + \omega = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z-i)\,.$$

On reconnait alors $\boxed{\text{une rotation de centre } \Omega(1) \text{ et d'angle } \theta = \frac{\pi}{2}.}$

5.3 Soit $f : z \mapsto \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$. Puisque $a = \frac{1-i}{2} \neq 1$, f est une similitude avec un unique point fixe. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega \quad &\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1-i}{2}\,\omega + \frac{-3+i}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega\,\frac{1+i}{2} = \frac{-3+i}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{1+1} = \frac{-3+3i+i+1}{2} = -1+2i. \end{aligned}$$

Posons $\omega = -1+2i$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1-i}{2}(z-\omega) + \omega = \frac{1-i}{2}(z+1-2i) - 1 + 2i = \frac{1-i}{2}z + \frac{1-2i-i-2-2+4i}{2} = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2} = f(z).$$

Or $\frac{1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}(z-\omega) + \omega\,.$$

On reconnait alors $\boxed{\text{une similitude d'angle } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ et de coefficient homothétique } k = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$

5.4 Soit $f : z \mapsto \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + i + \sqrt{3}$. Comme $a = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \neq 1$, f est une similitude avec un unique point fixe. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega \quad &\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\,\omega + i + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega\,\frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \sqrt{3} + i \\ &\Leftrightarrow \quad \omega = 2\frac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i} = 2\frac{(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}+3i+i-\sqrt{3}}{2} = 2i. \end{aligned}$$

Posons $\omega = 2i$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z-\omega) + \omega = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z-2i) + 2i = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z - i + \sqrt{3} + 2i = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \sqrt{3} + i = f(z).$$

Or $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(z-\omega) + \omega\,.$$

On reconnait alors $\boxed{\text{une rotation d'angle } \theta = \frac{\pi}{3}.}$

5.5 Soit $f : z \mapsto (1+i)\,z$. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,z.$$

On reconnait alors $\boxed{\text{une similitude d'angle de rotation } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ et de coefficient d'homothétie de } k = \sqrt{2}}$.