Interrogation 27 d'entrainement
Géométrie

1. **Enoncer un résultat du cours.**
   1.1 Définir un produit scalaire.
   1.2 Définir une norme euclidienne.
   1.3 Formule sur la norme de la somme de deux vecteurs au carré.
   1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz.
   1.5 Définir un repère orthonormé direct.
   1.6 Comment s'écrit une matrice de passage entre deux bases orthonormée directe ?
   1.7 Formulation géométrique du produit scalaire et du déterminant.
   1.8 Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul (non nécessairement normé). Quel est le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$?
   1.9 Formule sur l'aire d'un parallélogramme.
   1.10 Préciser l'effet d'opérations élémentaires sur les colonnes sur le déterminant.
2. **Projeté orthogonal.**
   2.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $M\,(-7, 18)$. Calculer la distance de M à $\mathcal{D}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté de M sur $\mathcal{D}$.
   2.2 Soient $A\,(0, 1)$, $B\,(3, -1)$ et $M\,(3, 12)$ trois points du plan. Calculer la distance de M à (AB) et déterminer les coordonnées de H, le projeté de M sur (AB).
   2.3 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ une droite de l'espace, $M\,(1, 2, 3)$ un point de l'espace. Calculer la distance de M à $\mathcal{D}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté de M sur $\mathcal{D}$.
   2.4 Soient $A\,(0, 1, 0)$, $B\,(2, 3, -1)$ et $M\,(0, 0, 5/2)$ trois points de l'espace. Calculer la distance de M à (AB) et déterminer les coordonnées de H le projeté de M sur (AB).
   2.5 Soient $\mathcal{P} : -3x + 2y + z + 7 = 0$ un plan de l'espace et $M\,(-7, 6, 2)$ un point de l'espace. Calculer la distance de M à $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté de M sur $\mathcal{P}$.
   2.6 Soient $\mathcal{P} : -4x + 2y - 3z - 5 = 0$ un plan de l'espace et $M\,(7, -5, 5)$ un point de l'espace. Calculer la distance de M à $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté de M sur $\mathcal{P}$.
3. **Intersection.**
   3.1 Déterminer le **nombre** de points d'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$.
   3.2 Montrer que les droites $\mathcal{D}_1 : 3x - y + 8 = 0$, $\mathcal{D}_2 : x - 3y - 4 = 0$ et $\mathcal{D}_3 : x + 3y + 11 = 0$ sont concourantes et vérifier que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont orthogonales.
   3.3 Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ et $M\,(-2, 0) \in \mathcal{C}$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M.
   3.4 Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0$ et de la droite $\mathcal{D} : x + y + 1 = 0$.
   3.5 Soient $A\,(1, 2, -3)$, $B\,(-1, 2, 0)$ et $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 2 = 0$. Déterminer des équations paramétriques de (AB) et en déduire l'ensemble des points d'intersection de (AB) avec $\mathcal{P}$.

4. **Calculer un déterminant.**

4.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A.

4.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A.

4.3 Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A.

4.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A.

4.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A.

5. **Appliquer le théorème fondamental de l'analyse.**

5.1 Justifier que $F : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{tx} \arccos(tx)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[-1;0[\cup]0;1]$ et donner une expression de sa dérivée.

5.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}([0;1])$. Déterminer le domaine de dérivabilité de $F : x \mapsto \int_0^1 (1+tx)^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de $F'(0)$.

5.3 Déterminer le domaine de dérivabilité de $F : x \mapsto \int_{x+1}^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.

5.4 Déterminer le domaine de dérivabilité de $F : x \mapsto \ln\left(\int_0^{3x} \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et donner une expression de sa dérivée.

5.5 Déterminer le domaine de dérivabilité de $F : x \mapsto \int_2^3 (tx)^{tx}\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.

Question 2.

2.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $M(-7, 18)$. D'après ses équations paramétriques, $A(5,2)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}(-1,3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. En posant $\vec{n}(3,1)$, on observe que $\langle \vec{n} | \vec{u} \rangle = (-1)(3) + (3)(1) = 0$. Donc $\vec{n}$ est normal à $\vec{u}$ et donc à $\mathcal{D}$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $\mathcal{D} : 3x + y + c = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Or $A(5,2) \in \mathcal{D}$ donc $15 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -17$. Ainsi $\mathcal{D} : 3x + y - 17 = 0$. Donc d'après le cours,

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|3(-7) + 18 - 17|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}.$$

De plus, comme $A \in \mathcal{D}$ et que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{9 + 1} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{12 + 48}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(M, \mathcal{D}) = 2\sqrt{10} \qquad \text{et} \qquad H \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.}$$

2.2 Soient $A(0,1)$, $B(3,-1)$ et $M(3,12)$ trois points du plan. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(3,-2)$ est un vecteur directeur de (AB). On remarque alors que $\vec{n}(2,3)$ est un vecteur normal à $\vec{u}$ car $\langle \vec{n} | \vec{u} \rangle = 6 - 6 = 0$ et donc $\vec{n}$ est normal à $\overrightarrow{AB}$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $(AB) : 2x + 3y + c = 0$. Or $A \in (AB)$, donc $3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$. Donc $2x + 3y - 3 = 0$ est une équation cartésienne de (AB). D'où

$$d(M, (AB)) = \frac{|2 \times 3 + 3 \times 12 - 3|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{39}{\sqrt{13}} = 3\sqrt{13}.$$

De plus,

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{9 - 22}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(M, (AB)) = 3\sqrt{13} \qquad \text{et} \qquad H \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.}$$

2.3 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ une droite de l'espace, $M(1,2,3)$ un point de l'espace. Soit $A(x,y,z) \in \mathscr{E}$ un point de l'espace. On a les équivalences suivantes :

$$M \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad (x, y, z) = x(1,1,1) + (0,1,0).$$

Donc $\mathcal{D} = (1,0,0) + \text{Vect}(1,1,1)$. Autrement dit $A(0,1,0)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}(1,1,1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Donc d'après le cours,

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1 - 3 \\ 3 - 1 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 + 4}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

De plus,

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{u} \right\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1+1+3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(M, \mathcal{D}) = \frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad \text{et} \qquad H \begin{bmatrix} 5/3 \\ 8/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}.}$$

2.4 Soient $A(0,1,0)$, $B(2,3,-1)$ et $M(0,0,5/2)$ trois points de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(2,2,-1)$ est un vecteur directeur de (AB). Donc

$$d(M,(AB)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5/2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1-5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|}{3} = \frac{\sqrt{16+25+4}}{3} = \frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}.$$

De plus,

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{u} \right\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5/2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-2-\frac{5}{2}}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{d(M,(AB)) = \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad H \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.}$$

2.5 Soient $\mathcal{P} : -3x + 2y + z + 7 = 0$ un plan de l'espace et $M(-7,6,2)$ un point de l'espace. D'après le cours,

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|-3(-7) + 2(6) + 2 + 7|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{|21+12+9|}{\sqrt{14}} = \frac{42}{\sqrt{14}} = 3\sqrt{14}.$$

De plus, $\overrightarrow{n}(-3,2,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Donc,

$$H = M \pm d(M, \mathcal{P}) \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \pm 3\sqrt{14} \times \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Or $-3(-16) + 2 \times 12 + 5 + 7 > 0$, donc $(-16,12,5) \notin \mathcal{P}$. Donc $H(2,0,-1)$. Conclusion,

$$\boxed{d(M, \mathcal{P}) = 3\sqrt{14} \qquad \text{et} \qquad H \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.}$$

2.6 Soient $\mathcal{P} : -4x+2y-3z-5=0$ un plan de l'espace et $M(7,-5,5)$ un point de l'espace. D'après le cours,

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|-4\times 7+2(-5)-3\times 5-5|}{\sqrt{16+4+9}} = \frac{|-28-10-15-5|}{\sqrt{29}} = \frac{58}{\sqrt{29}} = 2\sqrt{29}.$$

De plus, $\vec{n}(-4,2,-3)$ étant un vecteur normal à $\mathcal{P}$,

$$H = M \pm d(M,\mathcal{P})\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix}7\\-5\\5\end{bmatrix} \pm 2\sqrt{29}\times\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{bmatrix}-4\\2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-5\\5\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}-8\\4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix}15\\-9\\11\end{bmatrix}.$$

Or $-4\times 15+2(-9)-3\times 11-5 = 15-18-33-5 = -41 < 0$. Donc $H(-1,-1,-1,)$. Conclusion,

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = 2\sqrt{29} \qquad \text{et} \qquad H\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}.}$$

Question 3.

3.1 Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$x^2-2x+y^2-4y+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2-1+(y-2)^2-4+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2+(y-2)^2=4=2^2.$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon $R=2$. De la même façon, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$x^2+2x+y^2-2y-7=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)^2-1+(y-1)^2-1-7=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)^2+(y-1)^2=9=3^2.$$

Donc $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $\Omega'(-1,1)$ et de rayon $R'=3$. On observe alors que

$$\Omega\,\Omega' = \left\|\overrightarrow{\Omega\,\Omega'}\right\| = \sqrt{(-1-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

D'autre part, $R+R'=3+2=5$ et $|R-R'|=3-2=1$. Donc

$$|R-R'| = 1 < \Omega\,\Omega' < 5 = R+R'.$$

Conclusion, $\boxed{\text{les deux cercles se coupent en deux points distincts.}}$

3.2 Soit $M(x,y)$ un point du plan. On a

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2\cap\mathcal{D}_2 \quad&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}3x-y+8=0\\x-3y-4=0\\x+3y+11=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x-3y-4=0\\3x-y+8=0\\x+3y+11=0\end{cases} \qquad L_1\leftrightarrow L_2\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x-3y-4=0\\8y+20=0\\6y+15=0\end{cases} \qquad \begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-3L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=3y+4=0\\8y=-\frac{20}{8}=-\frac{5}{2}\\y=-\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=-\frac{15}{2}+4=-\frac{7}{2}\\y=-\frac{5}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve donc bien un point d'intersection $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2\cap\mathcal{D}_2=\{(-7/2;-5/2)\}$. Donc $\boxed{\text{les trois droites } \mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2 \text{ et } \mathcal{D}_3 \text{ sont concourantes}}$. De plus $\overrightarrow{n_1}(3,-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$ et $\overrightarrow{n_3}(1,3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_3$. Or $\langle\overrightarrow{n_1}|\overrightarrow{n_2}\rangle = 3\times 1-1\times 3=0$. Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux donc $\boxed{\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_3 \text{ sont perpendiculaires}}$.

3.3 Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ et $M(-2, 0) \in \mathcal{C}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2+y^2+4x+6y+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2-4+(y+3)^2-9+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2+(y+3)^2=9=3^2.$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, -3)$ et de rayon $R = 3$. Alors le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}(0, 3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point M. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $3y + c = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathcal{T}$. De plus $M \in \mathcal{T}$ donc, $3 \times 0 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$. Conclusion,

$\boxed{y = 0 \text{ est une équation cartésienne de } \mathcal{T} \text{ la tangente à } \mathcal{C} \text{ au point } M.}$

3.4 Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + (-x-1)^2 + \frac{5}{2}x + 2(-x-1) + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{2}x - 2x - 2 + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à $2x^2 + 6x + 1$. On a $\delta = \frac{25}{4} - 8 = -\frac{7}{4} < 0$ Nous n'avons donc aucune solution.

$\boxed{\text{L'ensemble des points d'intersection est vide.}}$

Autre méthode : On pouvait le voir en calculant le centre du cercle, son rayon, puis la distance du centre du cercle à la droite $\mathcal{D}$ et en vérifiant que cette distance est strictement plus grande que le rayon du cercle.

3.5 Soient $A(1, 2, -3)$, $B(-1, 2, 0)$ et $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 2 = 0$. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-2, 0, 3)$ est un vecteur directeur de (AB). Donc les équations paramétriques de (AB) sont

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t. \end{cases} .$$

Soient $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On a

$$\begin{aligned}
M \in (AB) \cap \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R}, x = 1 - 2t,\ y = 2,\ z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1 - 2t,\ y = 2,\ z = -3 + 3t \\ 2(1 - 2t) - 2 + 3(-3 + 3t) - 2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1 - 2t,\ y = 2,\ z = -3 + 3t \\ 2 - 4t - 2 - 9 + 9t - 2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1 - 2t,\ y = 2,\ z = -3 + 3t \\ 5t = 11 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 1 - 2 \times \frac{11}{5},\ y = 2,\ z = -3 + 3 \times \frac{11}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{17}{5},\ y = 2,\ z = \frac{-15 + 33}{5} = \frac{18}{5}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{il existe un unique point d'intersection donné par } M(-17/5, 2, 18/5).}$

Question 4.

4.1 On remarque que A possède une colonne nulle ! Donc $\boxed{\det(A) = 0}$ et la matrice A n'est donc pas inversible.

4.2 Par la règle de Sarrus, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+1-0-0-0 = 2.$$

Donc $\boxed{\det(A) = 2}$. Notamment $\det(A) \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

4.3 Par développement par rapport à la première ligne, on observe que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^n a_0 \det(I_{n-1}) = (-1)^n a_0.$$

Conclusion, $\boxed{\det(A) = (-1)^n a_0}$. En particulier, A est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.

4.4 Par la règle de Sarrus,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 8-10-6+6+16-5 = 9.$$

Conclusion, $\boxed{\det(A) = 9}$. En particulier, A est inversible.

4.5 Par opérations élémentaires, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

Par développement par rapport à la première colonne puis la première ligne,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3(6-2) + 2(-4+3) = -12-2 = -14.$$

Conclusion, $\boxed{\det(A) = -14}$. En particulier, A est inversible.

Question 5.

5.1 Soit $F : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{tx} \arccos(tx)\,\mathrm{d}t$. Soit $x \in [-1;0[\cup]0;1]$, alors pour tout $t \in [0;1]$, $tx \in [-1;1]$ donc $\arccos(tx)$ est bien définie. Plus précisément, $t \mapsto \arccos(tx)$ est continue sur $[0;1]$. De plus $t \mapsto \mathrm{e}^{tx}$ est aussi continue sur $[0;1]$. Donc $\int_0^1 \mathrm{e}^{tx} \arccos(tx)\,\mathrm{d}t$ est bien définie. Donc pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$, $F(x)$ existe. De plus par le changement de variable $s = tx \Leftrightarrow t = \frac{s}{x}$, on a pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$,

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^s \arccos(s) \frac{\mathrm{d}s}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{e}^s \arccos(s)\,\mathrm{d}s.$$

On sait que la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^s \arccos(s)$ est continue sur $[-1;1]$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse, $G : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^s \arccos(s)\,\mathrm{d}s$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$ et pour tout $x \in [-1;1]$, $G'(x) = \mathrm{e}^x \arccos(x)$ (G est l'unique primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x \arccos(x)$ s'annulant en 0). Donc par quotient de deux fonctions $\mathscr{C}^1$,

> la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;0[\cup]0;1]$ et pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$,
>
> $$F'(x) = \left(\frac{G(x)}{x}\right)' = \frac{G'(x)x - G(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(x\,\mathrm{e}^x \arccos(x) + \int_0^x \mathrm{e}^s \arccos(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

5.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}([0;1])$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto (1+tx)^n f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $F(x)$ existe. De plus par la formule du binôme de Newton puis la linéarité de l'intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (tx)^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \underbrace{\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{indépendant de } x}$$

On observe alors que F est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ et est donc $\mathscr{C}^\infty$. En particulier, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} \int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, $F'(0) = \binom{n}{1}\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$. Conclusion,

$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(0) = n\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t}$.

5.3 Soit $f : t \mapsto \sqrt{\mathrm{sh}(t)}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) \text{ existe } \Leftrightarrow \mathrm{sh}(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0.$$

Donc f est définie et même continue sur $[0;+\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$, de ce qui précède, on en déduit que

$$F(x) \text{ existe } \Leftrightarrow [x+1;\mathrm{e}^x] \subseteq \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x+1 \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{e}^x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1.$$

Donc F est définie sur $[-1;+\infty[$. Posons $G : x \mapsto \int_0^x \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \sqrt{\mathrm{sh}(t)}$ est continue sur $[0;+\infty[$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $G'(x) = \sqrt{\mathrm{sh}(x)}$. De plus pour tout $x \geqslant -1$,

$$F(x) = \int_0^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x+1} \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = G(\mathrm{e}^x) - G(x+1).$$

Donc F est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;+\infty[$ en tant que composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \geqslant -1$,

$$F'(x) = \mathrm{e}^x G'(\mathrm{e}^x) - G'(x+1) = \mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{sh}(\mathrm{e}^x)} - \sqrt{\mathrm{sh}(x+1)}.$$

> Conclusion, F est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;+\infty[$ et
>
> $$\forall x \geqslant -1, \quad F'(x) = \mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{sh}(\mathrm{e}^x)} - \sqrt{\mathrm{sh}(x+1)}.$$

5.4 La fonction $f : t \mapsto \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)$ est définie, continue et positive sur $[0;1]$. Donc par le théorème fondamentale de l'analyse, la fonction $G : x \mapsto \int_0^x \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$,

$$G'(x) = \mathrm{ch}(x)\arcsin(x).$$

En particulier la fonction G' est strictement positive sur $]0;1]$ et donc G est strictement croissante sur $]0;1]$ et donc pour tout $x \in]0;1]$, $G(x) > G(0) = 0$. Donc G est strictement positive sur $]0;1]$. Donc par composition, $x \mapsto G(3x)$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement positive sur $]0;1/3]$. Or pour tout x, $F(x) = \ln(G(3x))$.

Conclusion, F est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1/3]$ et

$$\forall x \in]0;1/3], \quad F'(x) = \frac{3G'(3x)}{\ln(G(3x))} = \frac{3\,\mathrm{ch}(3x)\arcsin(3x)}{\int_0^{3x} \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\,\mathrm{d}t}.$$

5.5 Soit $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $t \in [2;3]$, $(tx)^{tx} = \mathrm{e}^{tx\ln(tx)}$ existe si et seulement $tx > 0$ si et seulement si $x > 0$. Donc pour tout $x > 0$, $t \mapsto (tx)^{tx}$ est définie et continue sur $[2;3]$. Donc pour tout $x > 0$, $F(x)$ existe et par la changement de variable $s = tx$, on a

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int 2x^{3x}\,\mathrm{e}^{s\ln(s)}\,\frac{\mathrm{d}s}{x}.$$

On pose $G : x \mapsto \int_1^x \mathrm{e}^{s\ln(s)}\,\mathrm{d}s$. La fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{s\ln(s)}$ est continue sur $]0;+\infty[$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, G est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $G'(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. De plus pour tout $x > 0$ $F(x) = G(3x) - G(2x)$.

Conclusion, F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = 3G'(3x) - 2G(2x) = 3\,\mathrm{e}^{3x\ln(3x)} - 2\,\mathrm{e}^{2x\ln(2x)}.$$