Correction de l'interrogation 2 du 17/09
Logique, raisonnement et trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les assertions

$$P(x): \quad \exists y \in \mathbb{N}^*, \quad -\pi \leqslant xy \leqslant \pi.$$
$$Q(x): \quad \forall y \in \mathbb{N}^*, \quad -\pi \leqslant xy \leqslant \pi.$$

1. Enoncer $non(Q(x))$.
   Réponse : $non\,(Q(x))$: $\exists y \in \mathbb{N}^*$, $xy < -\pi$ OU $xy > \pi$.
2. Montrer que l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est fausse.
   Réponse : Montrons qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ pour lequel $P(x)$ est vrai et pourtant $Q(x)$ est faux. Attention, $Q(x)$ n'est pas toujours faux, par exemple $Q(0)$ est vrai. Ici, prenons $x = 1$ (par exemple). Pour $y = 1$ on a bien $-\pi \leqslant xy \leqslant \pi$. Donc $P(1)$ est vraie. Pourtant en prenant $y = 10$, on observe que $xy = 10 > \pi$. Donc $Q(1)$ est faux. Ce contre exemple montre qu'en général l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est fausse.
3. Enoncer la réciproque de $P(x) \Rightarrow Q(x)$. Quelle est sa valeur de vérité (aucune justification n'est attendue).
   Réponse : La réciproque (à ne pas confondre avec la négation ou la contraposée !) est $Q(x) \Rightarrow P(x)$. Cette implication est vraie. En effet toute propriété vraie pour toute valeur d'une variable (ici y) est notamment vraie pour au moins une valeur de cette variable.
4. A partir de $P(x)$ construire une assertion qui ne soit pas un prédicat (on ne s'intéressera pas à la valeur de vérité de cette assertion).
   NB : plusieurs solutions sont possibles m'en donner une.
   Réponse : On pouvait considérer par exemple $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x))$ ou $(\exists x \in \mathbb{R}, \quad P(x))$. Ces deux assertions ne dépendent d'aucun paramètre, ce ne sont pas des prédicats.
5. L'assertion R : $(\forall x \in [-1;1],\ \sin(x) \leqslant 4)$ est-elle vraie ou fausse ?
   Réponse : La fonction sinus est majorée sur $\mathbb{R}$ par 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) \leqslant 1 \leqslant 4$. Donc notamment $\forall x \in [-1;1], \quad \sin(x) \leqslant 4$. L'assertion est vraie.
6. Donner la parité de la fonction sinus et l'écrire en termes mathématiques.
   Réponse : La fonction sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin(x)$.
7. Soient a et b deux réels. Linéariser $\sin(a)\sin(b)$.
   Réponse : D'après le cours, $\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$.
8. Exprimer $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   Réponse : D'après le cours on a $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.
9. En déduire une équation vérifiée par $X = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   Réponse : En remplaçant $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ par X dans la formule précédente, on a $\frac{2X}{1-X^2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Or $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, donc
   $$\frac{2X}{1-X^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2X = 1 - X^2 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 + 2X - 1 = 0.$$
10. Résoudre l'équation précédente et en déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
    Réponse : Le discriminant de $X^2 + 2X - 1$ est $\Delta = 4 + 4 = 8$. Donc les racines de $X^2 + 2X - 1$ sont $\frac{-2-\sqrt{8}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$ et $\frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2}$. Or $\frac{\pi}{8} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $X = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$. Ainsi seule la seconde racine est solution : $X = \sqrt{2} - 1$.