Programme de colles 11
Espaces vectoriels de dimension finie et applications linéaires

Quinzaine du 18 au 31 Mars

Espaces vectoriels de dimension finie

1. Familles finies de vecteurs : familles génératrice, libres, liées. Opérations sur ses familles sans changer leur caractère.
2. Cas des polynômes de degrés échelonnés.
3. Base d'un ensemble. Définition. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Base adaptée à la somme.
5. Définition d'un espace de dimension finie.
6. Théorème de la base extraite, de la base incomplète. Existence d'une base en dimension finie.
7. Toutes les bases d'un même espace ont le même cardinal. Définition de la dimension.
8. Lien entre le cardinal et le caractère libre, générateur.
9. Sous-espace vectoriel de dimension fini.
10. Rang d'une famille finie de vecteurs. Lien avec le caractère libre, générateur.
11. Dimension de la somme, formule de Grassmann. Caractérisation d'espaces supplémentaires avec la dimension. Existence d'un supplémentaire.

Applications linéaires

1. Définition par l'image d'une combinaison linéaire de deux vecteurs. Extension aux combinaisons de n vecteurs, cas particulier de la somme et de la multiplication externe.
2. Définition de l'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$, vocabulaire : endomorphisme, forme linéaire, automorphisme, isomorphisme.
3. Image de 0, restriction à un sous-espace vectoriel, somme et composition d'applications linéaires, notation f^n.
4. $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. La composition d'applications linéaires est une application linaire. L'inverse d'une application linéaire est une application linéaire. Cas d'endomorphismes commutant (formule de Leibniz et de Bernoulli).
5. Noyau et Image. Définition. Ce sont des sous-espaces vectoriels. Généralisation l'image directe et l'image réciproque de sous-espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels.
6. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image.
7. Image d'un sous-espace engendré et écriture de $\mathrm{Im}(f)$ à l'aide une famille génératrice de E.
8. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre et l'image d'une famille génératrice par une application surjective est génératrice.
9. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire à l'aide de l'image d'une base.
10. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
11. Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des espaces supplémentaires.

Attention le théorème du rang et la caractérisation des isomorphismes à l'aide la dimension concerneront le prochain programme de colle.

Questions de cours

1. Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $\mathscr{F}$ est libre et si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n$ alors $\mathscr{F}$ est une base de E (extrait du théorème I.9).
2. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie. Montrer que $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ et discuter du cas d'égalité (extrait proposition II.1). *On pourra admettra que F est de dimension finie.*
3. Démontrer que l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
4. Démontrer que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel
5. Démontrer que si f est injective et si $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ est libre alors $f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.
6. Démontrer que si f est un isomorphisme alors f^{-1} est aussi un isomorphisme.