Programme de colles 11 PREVISIONNEL
Espaces vectoriels de dimension finie et applications linéaires

Quinzaine du 18 au 31 Mars

Espaces vectoriels de dimension finie

1. Familles finies de vecteurs : familles génératrice, libre liées. Définitions et opérations sur ses familles sans changer leur caractère.
2. Cas des polynômes de degrés échelonnés.
3. Base d'un ensemble. Définition. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Base adaptée à la somme.
5. Définition d'un espace de dimension finie.
6. Théorème de la base extraite, de la base incomplète. Existence d'une base en dimension finie.
7. Toutes les bases d'un même espace ont le même cardinal. Définition de la dimension.
8. Lien entre cardinal et le caractère libre, générateur.
9. Sous-espace vectoriel de dimension fini.
10. Rang d'une famille finie de vecteur. Lien avec le caractère libre, générateur.
11. Dimension de la somme, formule de Grassman. Caractérisation d'espaces supplémentaires avec la dimension. Existence d'un supplémentaire.

Applications linéaires

...

Questions de cours

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si toute famille de strictement plus de n vecteurs est liée alors toute famille de strictement moins de n vecteurs n'est pas génératrice (extrait proposition I.5).
2. Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $\mathscr{F}$ est libre et si $\mathrm{Card}\,(\mathscr{F}) = n$ alors $\mathscr{F}$ est une base de E (extrait du théorème I.9).
3. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie. Montrer que $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ et discuter du cas d'égalité (extrait proposition II.1). *On pourra admettra que F est de dimension finie.*