



Programme de colles 15

Variables aléatoires, révisions

Quinzaine du 27 Mai au 08 Juin

Variables aléatoires

1. Définition d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . Notation $(X = x)$, $(X \leq x)$ etc.
2. Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $(X = x_i)$ forme un système complet d'événements incompatibles. Application au calcul de $\mathbb{P}(X \in A)$.
3. Loi d'une variable aléatoire.
4. Cas de la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$. « Théorème de transfert » pour les probabilités :
$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y = \varphi(x)}} \mathbb{P}(X = x).$$
5. Couple de variables aléatoires réelles. Les $((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ forment un système complet d'événements incompatibles, application au calcul $\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B)$.
6. Loi conjointe, marginale, conditionnelle de X sachant $Y = y$ ou Y sachant $X = x$.
7. Indépendance de deux v.a. définition sur les singletons.
Propriétés $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.
8. Définition d'un n -uplet de variables aléatoires. Indépendance.
9. Espérance, variance, covariance. Théorème de transfert pour une v.a. pour un couple de v.a.
10. Propriété de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
11. Formule de Keonig-Huygens, $\mathbb{V}(aX + bY) = a\mathbb{V}(X) + 2ab\text{Cov}(X, Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$.
12. Deux variables indépendantes sont non corrélées et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Dans ce cas, $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.
13. Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.
14. Loi usuelle : loi uniforme sur $[[1; n]]$, loi de Bernoulli, loi binomiale. Espérance et variance associées. Somme de deux lois binomiales indépendantes. Loi de la somme de n variables aléatoires de Bernoulli.

Révisions

1. Tout le programme sur les suites (notamment les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$).
2. Tout le programme sur les séries, en profiter pour faire des DL.
3. Tout le chapitre sur la dérivation.

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer le théorème de transfert.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov puis l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Démontrer sur un exemple qu'une application est un produit scalaire.
4. Appliquer sur un exemple la méthode de variation de la constante.